INTÉGRABLE OU PAS

par

Michèle Audin

Un satellite artificiel parcourt son orbite autour de la Terre. Une orbite circulaire, un voyage sans histoire. Cette révolution tranquille s'accompagne pourtant de mouvements de rotation variés, le satellite se retourne, oscille.

Le satellite est supposé n'être soumis qu'à l'attraction terrestre : champs magnétiques, vents solaires, influence d'autres corps célestes sont négligés. D'autre part, mon satellite, comme tous les autres systèmes dont je vais parler ici, sera supposé ne pas perdre d'énergie (nous sommes dans le cadre de la « mécanique conservative ».

L'*attitude*, c'est ainsi que les physiciens appellent les mouvements de rotation du satellite autour de son centre de gravité. Des mouvements qu'on ne peut ignorer : imaginons un instant que le satellite décide, attitude fâcheuse, de tourner le dos à la Terre, les antennes se retournent, les caméras vont voir de l'autre côté si l'azur est plus bleu. Ce n'est évidement pas pour ça qu'on l'a mis sur orbite. Il est nécessaire de savoir décrire, voire contrôler, ces changements d'attitude. Le satellite va-t-il toujours répéter les mêmes mouvements ? Va-t-il, au contraire, se mettre à s'agiter de façon incontrôlable ?

Comment poser ces questions de façon précise ? Comment y répondre de façon rigoureuse ? En termes mathématiques : on se demande si le système mécanique constitué par le satellite est « intégrable »... Quant à une réponse possible, elle est fournie par un théorème de Morales et Ramis (1999) qui fournit un critère algébrique d'intégrabilité. Question et réponse que je vais exposer ici.

Exemples. Avant de donner une définition formelle de l'intégrabilité, je vais essayer de décrire des exemples du comportement régulier qui lui est attaché et que nous souhaitons être celui de notre satellite. Donc, avant la définition d'un système intégrable, deux exemples : la toupie et le pendule sphérique.

Commençons par une expérience de physique facile, amusante et familière. Plutôt que de mettre un satellite sur orbite, on lance une toupie. Et on la regarde tourner. On examine attentivement le mouvement de l'extrémité de son axe.

Ceux de nos lecteurs qui n'auraient pas de toupie sous la main sont priés de se reporter aux figures, qui représentent l'objet et le résultat de l'expérience. L'extrémité de l'axe oscille entre deux cercles parallèles sur la sphère (idéale !) représentée sur la figure 5.

Voici une autre expérience de physique facile. On fixe une bille à une extrémité d'une tige, dont l'autre extrémité est fixe et l'on observe le mouvement du pendule ainsi fabriqué. Et l'on voit la bille tourner, coincée entre deux cercles parallèles d'une sphère (figures 6 et 7).

Qu'est-ce qu'un système intégrable ? Si chacun peut comprendre, en voyant les figures, que le mouvement du pendule et celui de la toupie présentent des analogies, c'est le travail des mathématiciens, après avoir mis ces analogies en évidence comme je viens de le faire, de théoriser ces ressemblances. Ce qui nous amène à la définition d'un système intégrable. Nous voyons, dans ces deux exemples, des trajectoires confinées entre deux cercles parallèles sur une sphère. Ou encore dans un anneau, comme sur la figure 7. Dans cet anneau, la trajectoire s'enroule régulièrement. Pour la toupie comme pour le pendule, on peut démontrer que ces trajectoires proviennent de trajectoires *linéaires* sur des tores, la figure 7 apparaissant comme la projection d'une figure dessinée sur une chambre à air (bas de la figure 3).

Le mouvement d'un système mécanique est décrit (grâce aux lois de la mécanique) par des équations différentielles. Les trajectoires, le mouvement que nous voyons, ce sont les solutions de ces équations différentielles. C'est sur ces équations, ou sur leurs solutions, que porte la définition de l'intégrabilité. On peut donner beaucoup de définitions :

– le système a des intégrales premières, des quantités conservées au cours du mouvement, comme l'énergie totale (puisqu'on a supposé qu'il n'y avait pas de déperdition d'énergie), le moment de la toupie par rapport à son axe, celui du pendule par rapport à la verticale,
– ou encore, le système se résout « par quadratures », en écrivant des intégrales (c'est l'origine de la terminologie).

De façon équivalente, on peut utiliser le comportement « linéaire sur des tores » explicité dans l'encadré 1 comme définition de l'intégrabilité du système.

Nous avons mis en évidence des analogies entre les comportements de deux systèmes, nous en avons tiré une définition, nous nous empressons de chercher si d'autres exemples de systèmes entrent ou n'entrent pas dans cette nouvelle catégorie.

Intégrables ou pas ? D'autres systèmes intégrables, il y en a, on s'en doute. Le plus célèbre est celui qui décrit le mouvement de deux corps célestes (la Terre et le Soleil, par exemple).

Ces systèmes présentent, de façon plus ou moins visible, un comportement du genre « oscillations entre deux parallèles », ce sont des systèmes intégrables.

Et c'est de cette simplicité, de cette régularité, que je m'inquiétais à propos de l'attitude du satellite. Et donc, bien sûr : ils sont tous comme ça, les systèmes mécaniques ? Et l'attitude du satellite ? Elle est intégrable, l'attitude ?

Eh bien, non ! Tous les systèmes ne sont pas intégrables. Par exemple, entre la Terre et le Soleil, tout se passait simplement, mais il suffit d'y ajouter la Lune pour que tout se complique. Poincaré le savait bien : « le problème à trois corps n'est pas intégrable », a-t'il démontré en XX, en prouvant qu'il n'y a pas assez de quantités conservées. Concrètement, le comportement pourrait devenir assez désordonné (mais pas tout de suite, que les lecteurs qui m'ont suivie jusque là se rassurent). Et une toupie qui ne serait pas symétrique ne serait pas non plus intégrable !

Quant à l'attitude du satellite, ce n'est pas non plus un système intégrable, comme on a pu le démontrer récemment (en 2002-2003).

... Ce qui n'empêche ni SPOT de continuer à prendre les belles images de la Terre que l'on sait (publicité gratuite), ni les satellites TELECOM de transmettre les indispensables « T'es où ? — Dans le train. Y a un tunnel, j'te rappelle. » à quoi servent les téléphones portables. Parce que, de même que les orbites, les attitudes peuvent être corrigées au fur et à mesure des besoins. Donc, bien sûr, le système mécanique très simplifié que j'ai présenté sous le nom d'« attitude du satellite » est une approximation bien trop grossière d'un « vrai » satellite pour que l'application du théorème de Morales et Ramis ait des conséquences dramatiques.

Poinsot, Euler, Lagrange, Kowalevskaya et les autres. La toute première approche à la non-intégrabilité est due à S. Kowalevskaya en 1889. Elle étudiait le mouvement d'un solide en se demandant à quelles conditions (sur la forme du solide) les solutions du système différentiel étaient des fonctions « méromorphes » du temps (une autre approche encore, dans laquelle le temps est considéré comme un nombre complexe). Elle a démontré que cette propriété était satisfaite dans trois cas seulement : les deux cas connus au XVIII^e^ siècle, quand le centre de gravité est un point fixe (cas étudié par Poinsot et Euler) et quand le solide est symétrique (la toupie, cas étudié par Lagrange), ainsi que dans un nouveau cas, qui porte depuis son nom.

Et elle a remarqué que dans ce troisième cas, il y a une intégrale première supplémentaire, la toupie de Kowalevskaya est intégrable au sens considéré ici.

La relation entre l'intégrabilité et la propriété de Kowalevskaya n'est pas complètement élucidée. Il serait un peu compliqué d'expliquer ici pourquoi, mais la méthode algébrique présentée dans cet article établit une telle relation.

Comment les mathématiciens démontrent-ils ce genre de résultats ? La méthode utilisée pour démontrer que l'attitude du satellite n'est pas intégrable consiste à s'assurer que ce système ne possède pas assez de quantités conservées, même en en acceptant de beaucoup moins régulières que celles considérées par Poincaré pour le problème à n corps. Elle est fondée sur un théorème de Morales et Ramis (1999) qui utilise la « théorie de Galois différentielle » et je demande solennellement à mes lecteurs de ne pas renoncer à me suivre pour si peu.

La théorie de Galois classique discute de problèmes dont il n'est pas trop difficile de saisir la saveur. Il s'agit d'équations, certes, mais on peut déjà se faire une idée assez claire en pensant aux deux équations

$$x^2 = 2 \text{ d'une part, et } x^5 - 6x + 1 = 0 \text{ de l'autre.}$$

Résoudre une équation, c'est chercher toutes ses solutions.

Par exemple, résoudre $x^2 = 2$, c'est chercher tous les *nombres* dont le carré est 2. Chacun sait que ces solutions sont les deux « nombres » $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Sauf que... si l'on cherche des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions $x = p/q$, où p et q sont des nombres entiers, des solutions, il n'y en a tout simplement pas, puisque pas plus $\sqrt{2}$ que $-\sqrt{2}$ n'est un nombre rationnel.

Résoudre $x^5 - 6x + 1 = 0$, c'est plus compliqué. On peut bien sûr chercher des valeurs approchées des solutions (j'y reviendrai). Galois s'intéresse plutôt à savoir ce qu'il peut dire de ces solutions sans les calculer. Il dit : je ne m'intéresse *qu'aux* nombres rationnels *et* à l'équation $x^5 - 6x + 1 = 0$, à tous les nombres que je peux fabriquer à l'aide de ses solutions *sans avoir besoin d'écrire ces solutions* (ce que je ne sais pas faire, de toute façon), je n'ai aucun besoin d'utiliser tous les nombres réels, je n'ai besoin que des nombres p/q, des solutions de mon équation (que je vais considérer en théorie) et de tous les nombres que je peux fabriquer en ajoutant et multipliant ceux-ci entre eux.

Ce point de vue appliqué à notre bébé-exemple $x^2 = 2$ amènerait à décider de ne pas utiliser $\sqrt{7}$, π, etc... qui ne servent à rien, mais seulement les p/q, $\sqrt{2}$ et tous les nombres comme 1, $\sqrt{2}/2$, $12 - 7\sqrt{2}$, etc... Dans l'encadré 2, on explique qu'il est possible d'associer à ces ensembles de nombres des groupes, le groupe de Galois de l'équation considérée, un groupe à deux éléments dans le cas de $x^2 = 2$, à cent vingt éléments dans celui de $x^5 - 6x + 1$.

Si je comprends bien, abstraitement, comment est fait ce groupe, je comprendrai comment est fait l'ensemble de tous ces nombres, et ça compensera le fait que je n'aie pas su en écrire les solutions par des formules.

On le sait, c'est au cours de sa dernière nuit, à la fois la plus mathématique des nuits de mai romantiques et la plus romantique des nuits mathématiques, que Galois a écrit l'essentiel de son œuvre.

« Les plus désespérés sont les chants les plus beaux... »

Que nul ne lui reproche sa concision ! Beaucoup de mathématiciens pensent aujourd'hui que le dernier texte de Galois concernait aussi la théorie différentielle. Les premières pierres de cette théorie ont été posées par des mathématiciens comme Drach, Picard et Vessiot au XIX^e^

siècle, puis Kolchin et beaucoup d'autres au XX$^{\text{e}}$. Parmi les travaux récents, il faut citer ceux de Jean-Pierre Ramis, qui a vraiment décrit en profondeur le contenu du groupe de Galois d'une équation différentielle.

Car s'il s'agit là aussi d'équations, ce sont cette fois des équations *différentielles*. Ce qui nous rapproche des systèmes mécaniques, dont le mouvement, nous l'avons dit, est décrit par des équations différentielles. Les élèves de terminale, ceux de nos lecteurs qui l'ont été, ainsi que tous ceux qui ont eu à calculer des intérêts composés, connaissent la fonction exponentielle, une fonction qui croît plus vite que tout ce qu'on connaissait avant de la rencontrer. Et ceci parce qu'elle est égale à sa dérivée. Le graphe de cette fonction est représenté sur la figure 8. La pente de la droite tangente à ce graphe au point de coordonnées (x, e^x) est le nombre e^x lui-même.

Et bien voilà, cette dernière phrase exprime que la fonction exponentielle $y = e^x$ est solution d'une équation différentielle, l'équation $y' = y$ si on veut absolument remplacer cette phrase par une formule.

Une équation bien simple. Mais dont la solution $y = e^x$ est quand même très compliquée : ce n'est pas un polynôme $P(x)$, ce n'est même pas une fraction $P(x)/Q(x)$, où P et Q sont des polynômes. Un peu comme $\sqrt{2}$, nombre solution de $x^2 = 2$ tout en étant irrationnel.

De même que $\sqrt{2}$ nous a entr'ouvert une porte sur la théorie de Galois classique, e^x nous approche de la théorie différentielle.

Le premier aboutissement, triomphe, devrait-on dire, de la théorie de Galois classique, a été de montrer qu'on ne peut pas écrire les solutions d'une équation de degré 5 à l'aide d'une formule générale comme le

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

des équations du second degré. Et ceci parce que le « groupe de Galois » de l'équation du cinquième degré n'est pas « résoluble », c'est-à-dire qu'on ne peut pas le décomposer en morceaux commutatifs (voir l'encadré 2). Le théorème de Morales et Ramis en est un analogue différentiel : un système intégrable définit des équations différentielles dont la théorie de Galois est très particulière : leur groupe de Galois différentiel doit être commutatif (ou presque).

Un plaidoyer pour la recherche fondamentale. Mon satellite était beaucoup trop simplifié pour que sa non-intégrabilité ait des conséquences pratiques... On aurait tort d'en déduire qu'il était inutile de s'en préoccuper. Je fais remarquer aux lecteurs que la question qui est à l'origine de la théorie de Galois et en particulier de la théorie des groupes, outil fondamental de presque toutes les mathématiques des deux derniers siècles et dont les retombées pratiques sont innombrables, est une question qui n'a strictement aucun intérêt pratique : déjà à l'époque de Galois, on savait résoudre numériquement très précisément les équations algébriques et la possibilité de les résoudre « par radicaux » n'aurait rien apporté de décisif...

Donc, nous disent Morales et Ramis, à système intégrable, groupe de Galois commutatif. Il reste en général un assez gros travail à faire, pour en déduire que tel ou tel système n'est pas intégrable. Le groupe de Galois d'une équation du cinquième degré est un groupe fini (il a au plus cent vingt éléments). Le groupe de Galois différentiel, lui, est quelque chose de beaucoup plus épais, un groupe de matrices. Un peu d'intuition géométrique peut parfois remplacer une grande puissance de calcul, comme dans le cas du satellite, où le théorème de non-intégrabilité présenté ici a été démontré par Delphine Boucher à l'aide de calcul formel (l'algèbre des ordinateurs) et par l'auteur de cet article par des méthodes géométriques.

Encadré 1. Dans un système intégrable, le mouvement est très régulier au sens où il peut être décrit *linéairement*, c'est à dire par des droites. Pour comprendre en quel sens la courbe qui tourne entre les

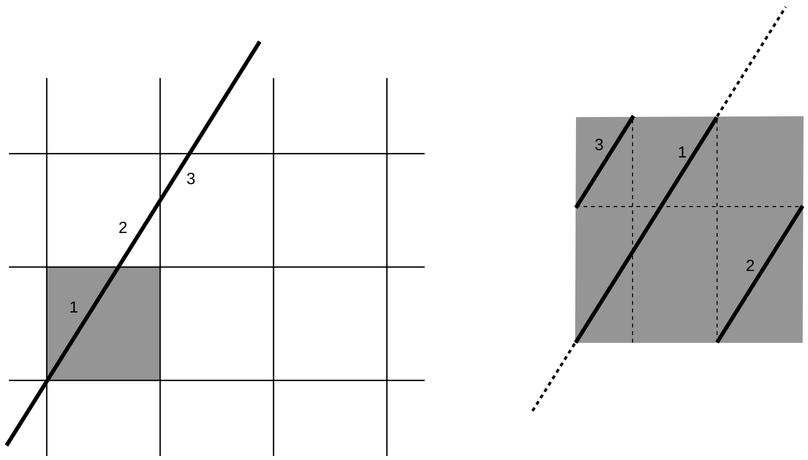

Figure 1

deux cercles de la figure 7 peut être considérée comme une droite, dessinons une droite (une honnête droite) dans un plan quadrillé (figure 1). Choisissons un des carrés, le carré grisé grossi sur la partie droite de la figure et décidons de représenter toute la droite dans ce seul carré, de la façon suivante. Le segment 1 est dans le carré, je le dessine. Le segment 2 est dans un autre carré (le carré juste au-dessus), je le reporte, identique à lui-même, mais dans mon carré grisé. le segment 3 est dans le carré à droite du précédent, je le dessine aussi dans le carré grisé, etc... Après les expériences de physique amusante, je propose aux lecteurs une expérience de mathématiques. Il s'agit de faire un dessin analogue en partant de différentes droites. La diagonale du carré, par exemple, qui va donner toujours le même segment, un seul segment, donc, ou la droite joignant le coin en bas à droite au milieu du segment horizontal du haut, qui va en donner deux (ce sont les cas a et b de la figure 2). Une droite assez générale, comme celle de la figure 1, va donner une infinité de segments différents, qui vont s'accumuler les uns sur les autres. On imagine maintenant que le carré grisé avec tous ses

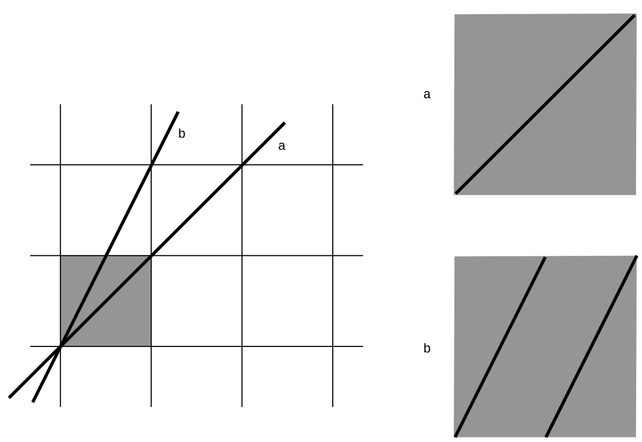

Figure 2

segments de droite est en caoutchouc et on recolle ensemble ses deux segments verticaux, c'est devenu un tuyau (cylindre), puis les deux extrémités du tuyau, c'est maintenant une chambre à air (tore). Au cours de ces opérations de recollement, nos segments se sont recollés entre eux et dessinent maintenant une ligne continue sur la chambre à air.

La figure 3 montre ces recollements, ainsi que certaines « droites », la diagonale du carré, d'abord, puis des droites plus compliquées. La toute dernière image représente encore une de ces droites, mais le tore a été représenté un peu plus aplati, pour faire apparaître la similitude avec la figure 7.

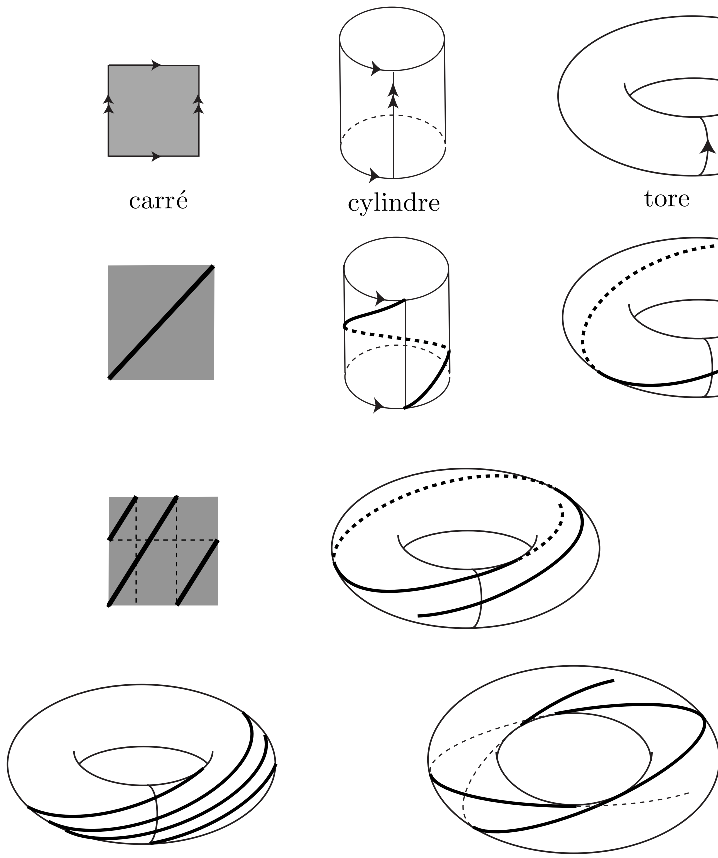

Figure 3

Un système intégrable est un système dont les trajectoires présentent cette propriété de linéarité, au sens où toutes les solutions, dans l'espace de phases, sont dessinées sur des tores contenus dans cet espace de phases. Ce que nous voyons, dans l'espace de configuration, ce sont des projections de ces tores (le passage du dessin, en volume sur un tore au dessin à plat dans l'anneau) Fin de l'encadré 1

Encadré 2. Le groupe de Galois. Reprenons l'exemple de l'équation $x^2 = 2$. Et supposons que nous ne connaissions que les nombres rationnels $a = p/q$ (p et q sont des entiers) et que nous voulions néanmoins calculer avec les solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ de l'équation. Nous allons donc considérer tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres rationnels.

Le groupe de Galois de l'équation $x^2 = 2$, c'est l'ensemble des transformations

$$a + b\sqrt{2} \longmapsto a' + b'\sqrt{2}$$

qui respectent les opérations (addition et multiplication). On démontre facilement qu'ill y en a deux

$$a + b\sqrt{2} \overset{s}{\longmapsto} a + b\sqrt{2} \text{ et } a + b\sqrt{2} \overset{t}{\longmapsto} a - b\sqrt{2}.$$

Le groupe de Galois est donc l'ensemble $\{s, t\}$. Dire que c'est un *groupe*, c'est dire qu'on peut composer les transformations en question, ici

$$s \circ s = t \circ t = s, \text{ et } t \circ s = s \circ t = t.$$

Pour l'équation $x^5 - 6x + 1 = 0$, on considère tous les nombres

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4$$

dans laquelle a, b, c, d et e sont des nombres rationnels et α est une solution de l'équation. Je n'ai pas besoin de connaître « la valeur » de α pour calculer avec ces nombres, j'utiliserai simplement le fait que α est une solution de l'équation, par exemple en remplaçant quand j'en aurai besoin, α^5 par $6\alpha - 1$. Le groupe de Galois de l'équation est le groupe de toutes les transformations de notre nouvel ensemble de nombres qui respectent l'addition et la multiplication.

En général, pour une équation de degré n, on trouve un groupe à $1 \times 2 \times \cdots \times n$ éléments (2 dans notre exemple de degré 2, 120 pour notre équation de degré 5).

Un groupe est *commutatif* si la composition peut se faire dans n'importe quel ordre et donner le même résultat. Le bébé-groupe de notre exemple a cette propriété, mais c'est exceptionnel. Pour une équation de degré 5 ou plus, le groupe n'est pas commutatif, et même pire : on ne peut pas le dévisser, le décomposer en morceaux simples qui soient commutatifs. Comme cette dernière propriété est de décomposition en morceaux commutatifs est équivalente à la résolubilité de l'équation correspondante « par radicaux », on dit que le groupe en question n'est pas « résoluble ».

Il existe des groupes de transformations beaucoup plus gros, par exemple le groupe de matrices

$$\mathrm{SL}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} \ldots$$

... On multiplie les matrices par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$

par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

ce groupe n'est pas commutatif. Le groupe de Galois d'une équation différentielle, défini de manière analogue à celui du groupe de Galois d'une équation algébrique, est de cette nature.

Par exemple, pour la simple équation d'Airy

$$y'' = xy$$

le groupe de Galois est justement le groupe SL(2). Fin de l'encadré 2

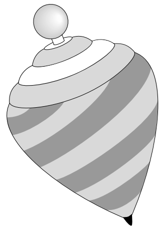

Figure 4. Une toupie

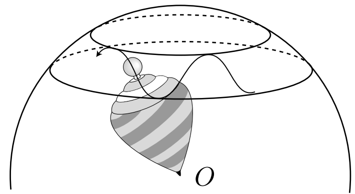

Figure 5. Mouvement de l'extrémité de l'axe

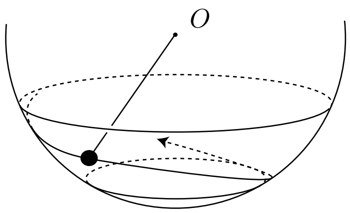

Figure 6. Pendule sphérique

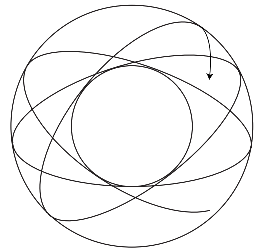

Figure 7. Une trajectoire (vue du dessus)

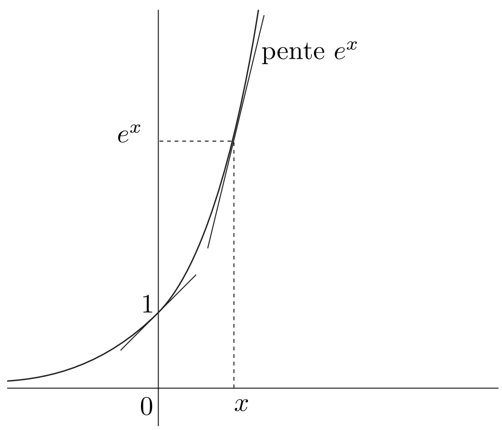

Figure 8. La fonction exponentielle

Version du 15 mars 2004

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • *E-mail :* `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`
Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`