UNE LETTRE RETROUVÉE D'ANDRÉ WEIL À HENRI CARTAN

par

Michèle Audin

Résumé. La lettre d'André Weil à Henri Cartan, datée du 21 mars 1940, manquante dans [**1**], et retrouvée depuis, est reproduite. Une question posée par Weil permet de faire un erratum à la bibliographie de la correspondance.

D'un cahier...

Henri Cartan rangeait ses archives de façon assez personnelle.

Voici un exemple qui apparaît clairement dans sa correspondance avec André Weil, la lettre de ce dernier datée du 1er août 1950 [**1**, p. 311] se trouvait dans un dossier « vieilles archives fonctions analytiques », contrairement aux autres lettres de juillet et août 1950, que Cartan avait classées dans un dossier « Cambridge ». Il y avait des raisons scientifiques, bien entendu. Voir les notes [**1**, p. 608].

Beaucoup des lettres qu'il avait reçues d'André Weil étaient classées, avec la correspondance générale, dans un ordre chronologique. D'autres, et en particulier les lettres manuscrites de prison faisaient exception : elles avaient été conservées soigneusement dans un dossier « Weil ».

En rangeant une grande masse de cahiers du fonds Henri Cartan à la bibliothèque mathématique de Strasbourg (notes de cours donnés ou subis, notes prises au cours de séminaires, rédactions de livres et travail personnel), j'ai trouvé dans ces cahiers beaucoup de documents assez divers. Un des cahiers (travail personnel, 1946) avait un format un peu particulier, de sorte qu'il était resté caché entre diverses piles de manuscrits et qu'il est un des derniers que j'ai ouverts(1). Ce travail personnel portait, en particulier, sur les groupes à un paramètre. Cartan y avait donc glissé plusieurs brouillons, sur papier libre. Une de ces feuilles en contenait une autre, que j'ai dépliée et qui, elle-même, contenait un feuillet plié en deux, manuscrit... évidemment de la

10 mai 2014.

(1)le matin du 25 avril 2014, après plusieurs jours de travail dans la bibliothèque main d'André Weil. Manuscrit, donc, ainsi que les lecteurs de [**1**] le savent, une lettre de prison. Datée, en effet, de Rouen et du 21 mars 1940.

Cette lettre manque ? s'interroge une note infrapaginale [**1**, p. 67]. Eh bien, elle ne manque plus : la voici. Il vous reste à l'imprimer et à la glisser, à votre tour, entre les pages 66 et 67 de votre exemplaire du livre.

Les notes sont toutes dues à l'auteur (M.A.).

Un erratum... Je renvoie à la note 11... Je corrige donc la bibliographie de [**1**]. L'information m'avait échappé lorsque j'ai édité la correspondance (comparer la référence [350] dans [**1**] et la référence [**4**] ici). Je corrige en même temps la référence [68], qui devient ici [**2**].

La lettre

Rouen, 21/III/40

Mon cher Cartan,

Je pense que tu es mort — assommé sans doute par mon Intégration. J'ai écrit à Dieudonné de se hâter d'en profiter pour renvoyer au diable (de qui sans doute tu les tiens) les espaces totalement ordonnés ; je partage entièrement ses sentiments à leur égard. J'ai encore d'autres propositions à faire, qui te peineront profondément : a) expulsion *totale*(2), sans aucune utilité pour nous, et qui sortent nettement de notre cadre, car ce ne sont pas des ensembles munis de structure ; je veux dire que pour eux la notion d'isomorphisme perd son sens, et doit être remplacée par « isom. *local* » ; b) pas de complétion(3) d'un groupe topologique non abélien ; c) au chap. III, un § avec la complétion des groupes abéliens et (le groupe étant écrit additivement) $\sum_{\iota \in I} a_\iota$ définie comme limite des sommes partielles finies suivant l'ordonné filtrant des parties finies ; avec : critère de Cauchy(4), existence de toutes les sommes partielles, commutativité (évidente) et associativité, etc. ; d) introduction de la notion d'isomorphisme local entre groupes, et au chap. VI la détermination de tous les groupes localement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ (par ton procédé d'extension de l'isomorphisme local en un homomorphisme global, $f(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$). e) interversion des chap. V et VI actuels (sauf bien entendu les pp. 72-80 rajoutées au chap. VI, les espaces complexes étant chaque fois étudiés à la suite des espaces réels correspondants) ; f) le chap. V reposant entièrement sur le théorème : tout groupe à un paramètre (à un paramètre = il existe un voisinage de l'unité homéomorphe à un intervalle, notion *locale* comme partout où il est question de groupe à n paramètres, de variétés à n dimensions, etc.) est localement isomorphe à $\mathbf{R}$, tout groupe connexe à un paramètre est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}$. Tout

(2) Weil a souligné « totale », ce que je rends comme toujours par des italiques, et Cartan a entouré le mot au crayon et ajouté un point d'interrogation en marge. Voir sa question dans sa réponse [**1**, p. 67]. Dans la suite, les ajouts au crayon sont attribués à Cartan.

(3) Cartan a souligné ces trois mots au crayon et mis un point d'exclamation en marge.

(4) Cartan a coché ce paragraphe et mis la lettre B (pour « Bien » ?) en marge.

le reste n'est que curiosité, joli à vrai dire, mais il ne faut pas présenter ces vieilleries archimédiennes comme l'essentiel ; en tout cas ce n'est pas l'essentiel *pour nous.*

Comme tu as réfléchi à ces questions de groupes tu pourras sans doute me dire si ce qui suit est nouveau(5) :

Dans un noyau de groupe non discret, localement(6) compact, ne contenant pas de sous-groupe infiniment petit, il existe au moins un sous-noyau à un paramètre.

Pour abréger, je parlerai de groupes. Soit G un groupe non discret, localement compact. Soit $V = V^{-1}$ un voisinage fermé compact de e, ne contenant aucun sous-groupe de G autre que $\{e\}$.

1) Si W est un voisinage de e, il existe N tel que $\{x, x^2, x^3 \dots x^N\} \subset V$ entraîne $x \in W$. Sinon, soit $x_n \notin W$ tel que $x_n^\nu \in V$, $1 \leq \nu \leq n$: soit Φ un filtre plus fin que le filtre élémentaire sur $N^{(7)}$, et tel que $\lim_\Phi x_n = a$ existe, d'où $a \in V \cap \overline{\complement W}$, donc $a \neq e$; on a $\lim_\Phi x_n^\nu = a^\nu$, et $x_n^\nu \in V$ dès que $n \geq \nu$, donc $a^\nu \in V$, donc le sous-groupe engendré par a est $\subset V$ et $\neq \{e\}$.

2) Soit, pour $x \in G$, $n(x)$ le plus grand entier tel que $0 \leq \nu \leq n(x)$ entraîne $x^\nu \in V$. Soit A tel que $e \notin A$, $e \in \overline{A}$; soit Ω un ultrafiltre plus fin que la trace sur A des voisinages de e. Soit $\tau \in \mathbf{R}$: si $k = [\tau]$ (partie entière de τ), on a $[\tau n(x)] = k \cdot n(x) + \nu$, $0 \leq \nu < n(x)$, donc $x^{[\tau \cdot n(x)]} \in V^{|k|+1}$, donc $f(\tau) = \lim_\Omega x^{[\tau \cdot n(x)]}$ existe quel que soit τ. On a $[(\sigma+\tau) \cdot n(x)] = [\sigma \cdot n(x)] + [\tau \cdot n(x)] + \delta$ avec $\delta = 0$ ou 1, donc $f(\sigma+\tau) = f(\sigma) \cdot f(\tau)$, puisque $\lim_\Omega x = e$. On a $x^{n(x)+1} \notin V$, donc $x^{n(x)} \in \overline{\complement V} \cdot W$ dès que $x \in W^{-1}$, et par suite $f(1) \in \overline{\complement V}$; pour $0 \leq \tau \leq 1$ on a $f(\tau) \in V$, donc (d'après la prop.1 ci-dessus(8)) $f(\tau) \in W$ dès que $0 \leq \tau \leq 1/N$, N assez grand, donc $f(\tau)$ est continue ; enfin $f(\tau)$ est un *iso*morphisme local, car $f(\tau)$ ne peut prendre deux fois la même valeur sur $[-1, +1]$ (si $f(\alpha) = f(\beta)$, l'image par f de $[\alpha, \beta]$ serait un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbf{T}$, contenu dans V), donc f est biunivoque et par suite bicontinue sur $[-1, +1]$.

Tu observeras que l'ensemble des noyaux à un paramètre ainsi décrits de l'ensemble A n'est autre que l'ensemble des « transformations infinitésimales » correspondant à A.

Cela est-il nouveau ? Cela a-t-il quelque utilité pour le 5e problème de Hilbert ? Je n'en sais rien.

Donne-moi un peu de tes nouvelles ; je n'ai rien reçu de toi depuis ton mot du 4(9). As-tu bien reçu la lettre que je te demandais de transmettre à Delsarte ? Je n'ai pas de nouvelles de lui depuis la lettre que tu m'avais transmise il y a un mois (*et je n'ai toujours pas son adresse*).

Amitiés

A Weil

---

(5) La lettre contient un premier essai de « ce qui suit », barré. La phrase (énoncé) suivante est cochée (par Weil) en marge.

(6) Cartan a mis des crochets autour de ce mot.

(7) C'est V.

(8) Il s'agit du « 1) ».

(9) Voir ci-dessous : Weil a reçu, avant d'expédier cette lettre, la lettre de Cartan du 17 dans laquelle il explique son retard à répondre. Voir [**1**, p. 63].

PS. Ne m'envoie pas le Journal de Crelle, t.181, n°1, dont je t'avais parlé.

Ce que j'indique ci-dessus (existence de sous-groupes à un paramètre) ne figurait-il pas déjà dans la note fausse de Chevalley(10) sur le 5e problème de Hilbert dont tu te souviens sûrement ?

— Reçu à l'instant ta lettre du 17. Je ne sais pas ce que c'est que le problème des spectres dont tu me parles. Fais-moi savoir le plus tôt possible si mon travail sur les Groupes doit faire partie des Publications de l'Institut de Strasbourg(11).

Références

[1] M. Audin – *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.

[2] H. Cartan – *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*, Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand, Hermann, Paris, 1940.

[3] C. Chevalley – « Génération d'un groupe topologique par des transformations infinitésimales », *C. R. Acad. Sci. Paris* **196** (1933), p. 744–746.

[4] A. Weil – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand, Hermann, Paris, 1940.

Michèle Audin, mathématicienne, université de Strasbourg
E-mail : michele.audin@math.unistra.fr • *Url :* http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

(10) Il s'agit de [**3**].

(11) Il s'agit de [**4**], de la publication duquel Weil se préoccupait. Contrairement à ce que l'on peut lire dans la bibliographie de [**1**], il est paru, non pas dans la sous-série de Hermann « Publications de l'Institut de mathématiques de Strasbourg » mais comme une des « Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand ». Sans mention de l'université, ce qui incluait implicitement celle de Strasbourg. Ceci permettait en tout cas à l'institut de mathématiques de l'Université de Strasbourg de ne pas se mouiller...