MON CHOIX DE SOPHIE

par

Michèle Audin

Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben

Résumé. J'explique comment mon travail de recherche m'a amenée à rencontrer un article de S. Kowalevski, puis quelques images que j'ai de celle-ci, je décris ensuite cet article (sur le solide pesant) avant de revenir sur ses images, j'inclus une relation de la séance de l'Académie des Sciences qui lui a attribué le prix Bordin et je conclus par un paragraphe sur sa réputation scientifique.

Table des matières

Avertissement

Dans cet article, je raconte Sophie Kowalevski et ce qu'elle a fait sur le solide, mais j'en fais une histoire un peu personnelle, avec des mathématiques. Je ne suis pas historienne et cet article ne prétend donc pas être œuvre d'historien·ne. Je ne suis pas historienne mais je suis mathématicienne, alors j'ai essayé de m'exprimer avec autant de rigueur que le font en principe les historien·nes et les mathématicien·nes et en particulier j'ai cité mes sources. En plus des articles de mathématiques cités, j'ai lu (je les cite par ordre chronologique de leur parution) le compte-rendu [1], les articles de Kowalevski sur le solide [38] et [39], les articles de Mittag-Leffler sur Kowalevski [45] et sur Weierstraß et Kowalevski [46], la traduction en anglais des *Souvenirs d'enfance* éditée et présentée par Stillman [35] avec une traduction [50] de l'analyse des travaux par Polubarinova-Kochina, les travaux d'historiens de Cooke [16, 14] et de Koblitz [30, 29, 31, 32][(1)], le livre de Détraz [19][(2)] et enfin les articles plus récents de Cooke [17, 18].

Version du 25 mars 2006.

(1) Si je n'adhère pas à toutes les conclusions de ces deux auteurs, je leur ai fait confiance pour leurs sources.

(2) Une politique éditoriale étrange fait que ce livre n'est plus disponible en librairie. On le trouve quand même dans les bonnes bibliothèques.

Remerciements. Je remercie Catherine Goldstein pour les critiques qu'elle m'a faites, les informations qu'elle m'a données et les copies des lettres de cet « épistolier délicieux » qu'était Hermite qu'elle m'a communiquées, Roger Cooke pour toutes les précisions qu'il m'a apportées, son autorisation à en reproduire certaines ici, les documents qu'il m'a envoyés et pour ses encouragements, Norbert Schappacher pour m'avoir prêté plusieurs des livres que je cite ici, Peter Richter pour l'image de la toupie de Brême, ses remarques amicales et ses encouragements, Robert Silhol pour ses commentaires chaleureux, ainsi que tous ceux qui m'ont donné des avis sur des versions préliminaires de ce texte, en particulier Véronique Chauveau, Jacqueline Détraz et Claude Sabbah, et ceux qui m'ont donné des informations comme Anna Helversen-Pasotto et Alain Yger.

Kowalevski. On peut discuter à l'infini de la façon d'écrire le nom de cette mathématicienne. J'ai pris pour principe que c'est à l'intéressé·e de choisir son nom. Sofia Kowalevskaya a signé les articles [**36**, **37**] et surtout [**38**, **39**] dont il sera question ici « Sophie Kowalevski », peut-être parce qu'elle avait rédigé ces articles en allemand pour les deux premiers, en français pour les deux autres. C'est aussi le nom qu'elle a fait graver sur ses cartes de visite professionnelles (en suédois) comme professeur à Stockholm (l'une d'elles est reproduite dans [**31**, p. 23]). C'est donc ainsi qu'elle pensait qu'on devait orthographier son nom, au moins dans un texte en français, — comme celui-ci — en allemand ou en suédois. L'inconvénient, me dira-t-on, est que le russe est féminin. Féminin ou masculin, c'est toujours le nom d'un homme. Elle a choisi de se marier et de porter le nom de son mari, elle a choisi de l'orthographier ainsi, ça me suffit ! Je respecte son choix.

Sophie. On me permettra d'appeler Sophie par son prénom(3) ; je me suis bien entendu demandé s'il n'y avait pas là un brin de sexisme(4). Eh bien, non : je n'aurais peut-être pas eu l'idée d'appeler Hilbert « notre David », je n'écrirai sans doute jamais « notre Paul » pour Painlevé, mais j'écrirais certainement « notre Évariste » si j'écrivais plus de quelques lignes sur Galois et on verra que j'appellerai Mittag-Leffler « Gösta ».

1. Introduction — comment j'ai rencontré Sophie

Je suis spécialiste de systèmes intégrables et plus généralement de géométrie symplectique. On explique en général ce qu'est cette sous-discipline des mathématiques en disant, en référence aux équations de Hamilton, qu'il s'agit d'une formulation de la mécanique classique. Ce qui est vrai, mais pas très clair. D'ailleurs, les flots de la Liffey ont fait couler beaucoup d'eau sous les ponts depuis Hamilton et la géométrie symplectique est devenue une discipline autonome. De sorte que mon intérêt pour le sujet n'a, au départ, rien à voir avec la mécanique. Il vient plutôt des singularités des fonctions — des caustiques de l'optique géométrique, s'il faut absolument donner une référence à la physique.

C'est par le contact entre les géométries algébrique et symplectique que j'ai commencé à m'intéresser aux systèmes intégrables (dont le « cas de Sophie Kowalevski » est un exemple), une frontière de la géométrie symplectique dont les objets sont en effet proches de la mécanique.

(3)La discussion sur le nom pourrait se prolonger en une discussion sur le prénom, Sophie, Sofia, Sonia, et sur ses graphies. Roger Cooke commente aujourd'hui l'usage du diminutif Sonya utilisé dans le titre de son livre [**16**] ainsi : pour un Russe, « Sonya Kovalevsakaya » sonne comme « Fedya Dostoevsky » ou « Osya Staline ».

(4)La question n'est pas sans objet. Dans le livre de Bell [**11**], une quarantaine de mathématiciens, une seule femme et aussi un·e seul·e mathématicien·ne appelé·e par son prénom, « Sonja » (si l'on excepte les frères Bernoulli qu'il fallait bien distinguer les uns des autres). Plus récemment, dans celui de James [**25**], soixante mathématiciens, d'Euler à von Neumann, tous désignés par leur nom de famille seul, sauf Sophie Germain et Emmy Noether, désignées par nom et prénom, et notre Sophie, qu'il arrive à l'auteur de désigner par son prénom seul (et elle est la seule dans ce cas) — devinez combien il y a de mathématiciennes dans [**25**] ?

Vers 1990, nous avions à Strasbourg un séminaire sur les systèmes intégrables dans lequel Jean-Yves Merindol avait proposé d'exposer un très bel article de Griffiths [23].

Dans tout ce que j'avais lu auparavant sur ces systèmes et leur traitement par la géométrie algébrique, on exhibe une paire de Lax, le système différentiel mis sous forme d'une équation de Lax fournit une courbe algébrique, la courbe spectrale, et donc aussi sa jacobienne, et souvent (c'est ce qu'étudie Griffiths précisément dans [23]) linéarisation des solutions sur icelle (la jacobienne est un tore, elle a une structure affine canonique, ce qui donne un sens au mot « linéarisation »). Alors qu'en géométrie symplectique, l'espace de phases est feuilleté par des tores, dits tores de Liouville et le système différentiel s'écrit de façon linéaire sur ces tores. Le lien entre ces tores algébriques que sont les jacobiennes et ces tores topologiques que sont les tores de Liouville n'est pas parfaitement clair (c'est un euphémisme). Grâce à Griffiths (merci Jean-Yves) tout devient limpide : les valeurs propres de la matrice de Lax donnent la courbe, ses vecteurs propres lient la jacobienne de cette courbe aux tores de Liouville.

Remarque. Dans tous les articles, une liste de cas « classiques » est dressée, ainsi que la façon dont les méthodes présentées s'appliquent dans ces cas, avec, à l'époque, la rituelle mention : jusqu'à maintenant, on ne sait pas mettre le cas de Kowalevski sous forme de Lax (voir par exemple [54]). Heureusement, ça ne va pas durer !

J'ai donc l'idée (qui me semble si naturelle que je m'étonne encore aujourd'hui que personne n'y ait pensé avant moi) que l'on doit pouvoir utiliser ces vecteurs propres pour faire de la topologie, pour comparer la partie réelle de la jacobienne (une réunion disjointe de tores) au niveau des intégrales premières considéré (une autre réunion disjointe de tores). Je me mets donc à la recherche d'un exemple pertinent et non trivial sur lequel essayer cette stratégie.

C'est alors que je tombe par hasard sur un article dont les auteurs affirment comprendre les tores de Liouville de la toupie de Kowalevski en décrivant la partie réelle de la jacobienne de la courbe de genre 2 utilisée par Kowalevskaya pour résoudre les équations de sa toupie. Je ne comprends pas bien ce qu'ils font précisément, et en plus, leur résultat me semble douteux. C'est ma première rencontre avec cet exemple, auquel je commence donc à réfléchir. Aucune inquiétude, je vais expliquer de quoi il s'agit (pas dans ce que je fais, mais dans ce qu'elle fait).

Il se trouve justement qu'à ce moment-là, en avril 1991, j'ai l'occasion de me rendre à Toulouse et que, par chance, les géomètres algébristes toulousains ont invité, en même temps, Robert Silhol, qui est l'un des auteurs de l'article après lequel j'en ai. C'est ainsi que nous faisons connaissance. Je l'agresse un peu à propos de l'article en question, ce n'est pas sérieux, ce que vous avez écrit, je suggère d'utiliser les vecteurs propres, et nous décidons de travailler ensemble sur la question.

Et justement, la paire de Lax du remarquable article [12] est apparue (j'expliquerai plus bas, au § 3.6.5, en quoi cet article est remarquable). La courbe spectrale (après une première réduction) est de genre 3, au lieu de 2 comme on aurait pu s'y attendre, mais il y a une symétrie et les vecteurs propres relient quand même la topologie à une variété abélienne de dimension 2, une « variété de Prym ». Robert connaît bien les espaces de modules des variétés abéliennes réelles, nous travaillons beaucoup, nous nous revoyons en juillet à Strasbourg, en septembre à Paris, ce n'est pas un exemple très facile, mais nous finissons le papier [10] en 1992.

Ensuite je fais, et Robert aussi, pas mal d'exposés, un peu partout, sur la méthode des vecteurs propres appliquée à la toupie de Kowalevski et sur les belles variétés de Prym qui en sont un des outils.

Il y a bien des « mystères » dans [38]. Par exemple, il y a une courbe de genre 2 (voir la figure 3), celle dont la jacobienne était le lieu des arguments que j'avais trouvés tellement douteux. La paire de Lax de [12] fournit, je l'ai dit, une courbe de genre 3 et, déjà à ce moment-là, nous avions trouvé que les relations entre tous ces objets n'étaient pas absolument claires. Et puis je lis plusieurs articles dans lesquels il est question du « mystérieux changement de variables de Kowalevski », alors ça m'intrigue et je vais (enfin) voir l'article original. C'est un plaisir d'avoir une occasion d'aller fouiller dans le coffre de la bibliothèque à Strasbourg, où sont, entre autres, stockés les volumes anciens de nos périodiques, en particulier, le volume d'*Acta math.* de 1889. J'avoue que j'admire surtout la belle typographie des formules.

Il y a aussi le colloque de l'association *European Women in Mathematics* au CIRM en décembre 1991, au cours duquel je rencontre Jacqueline Détraz, qui est professeur à Marseille et qui a écrit et publié le livre [19] sur Sophie. C'est ainsi que je fais connaissance avec la vie de Sophie, sa biographie. C'est aussi là que je commence à craindre le ghetto des femmes : je suis une femme, j'ai donc travaillé sur la toupie de Kowalevski parce que Kowalevskaya est une femme ; c'est ce que tout le monde pense (sauf peut-être les spécialistes de systèmes intégrables, mais ils sont si peu nombreux).

Je traite un autre exemple, celui des géodésiques des quadriques, à propos duquel j'écris un article [6] que je commence, parce que j'aime beaucoup les histoires de ceux qui ont vraiment fait des mesures de la Terre, par la mention du général russe Schubert, qui a mesuré les axes de l'ellipsoïde terrestre (en toises) et que cite Weierstraß [55], je pense un peu au système de Toda, j'écris d'autres articles, un livre (c'est [7], dans lequel il y a un chapitre sur la toupie de Kowalevski et où je reproduis des figures de [5], dont on vient de me rapporter une photocopie de Moscou, et je mentionne le livre [22]), je pense à autre chose, j'ai maintenant une certaine reconnaissance, sur le sujet en particulier, j'oublie Sophie.

2. Présence de Sophie

Mais quand même, elle est là, entre les travées de la bibliothèque, où l'on a affiché les grands posters représentant des portraits de mathématiciens (une élégante publicité de l'éditeur Springer), on y voit aussi Hilbert, avec son chapeau, notre Sophie je l'ai dit, Emmy Noether, et, je dois avouer que je ne me souviens plus qui étaient les autres. Il me semble que l'ambiance générale, autour de Sophie, est bien résumée par ce que l'on est supposé voir sur ces photos.

Et ce que l'on est supposé y voir est résumé dans un aphorisme (dont l'auteur[(5)] aura bien mérité la palme spéciale du mépris), que tous mes collègues de par le monde ont entendu (et que beaucoup ont répété) :

> « Il n'y a jamais eu que deux femmes mathématiciennes et encore, l'une n'était pas une femme (comprenez Emmy), l'autre n'était pas mathématicienne (comprenez Sophie) ».

Ce que l'on est supposé voir sur la photo de Noether, qu'il est de bon ton d'appeler « Tante Emmy » : les femmes qui font des maths, elles sont hommasses, c'est normal, les mathématiques, c'est un truc d'hommes. Je n'ai jamais compris ce que l'on reprochait à Noether, sur cette photo. Elle a l'air d'une personne normale, ni laide ni particulièrement masculine, assez sympathique avec son sourire fin. Elle ressemble aux femmes de sa génération, à mon arrière-grand-mère par exemple.

(5) Je l'ai vu quelque part attribué à Hermann Weyl. Roger Cooke me dit qu'il pense très improbable qu'il en soit l'auteur et il ajoute

> « If anybody is guilty of such a statement, it is most likely Eric Temple Bell, whose *Men of Mathematics* [11] is the most outrageous travesty possible against Kovalevskaya's mathematical talent. Bell deliberately and unforgivably tries to depict Kovalevskaya as a "sex kitten", trivializing her mathematical achievements. I marvel that there is not more outrage against what he wrote. »

L'image de Sophie. Sophie, elle, est réputée plutôt jolie. Et d'ailleurs, Weierstraß[(6)], vous savez bien... — une façon peut-être d'expliquer l'apparente compétence scientifique d'une femme, elle a « piqué », et par quels détours, ses idées à un homme ?

La photo que je reproduis ici et que tout le monde connaît, celle du poster Springer, celle qui est en couverture de [19], c'est aussi celle qui a été publiée dans le numéro 16 d'*Acta mathematica*, le numéro qui contient la notice biographique (nécrologique) [45], dans laquelle Gösta Mittag-Leffler nous informe qu'elle a été prise en 1887 à Stockholm alors que Sophie était

> « à l'apogée de sa carrière de mathématicien, de professeur et de savant ».

Le même Gösta dit d'elle dans [46] :

> « Mais elle était née mathématicienne, elle avait d'une façon très nette la conformation de l'œil gauche que Gall et Moebius ont reconnu (sic) comme caractéristique de l'instinct mathématique ; ce trait a d'ailleurs été enlevé par retouche sur la plupart de ses portraits. »

Bref, elle louchait un peu, comme on le voit d'ailleurs sur une photo avec Anne-Charlotte Leffler [19, p. 138]. Et Anne-Charlotte confirme, elle fait une description [19, p. 178] dont la moitié est consacrée aux yeux de Sophie (cette moitié est assez lyrique) et qu'elle conclut par :

> « Le charme de ces yeux était si grand, qu'on remarquait à peine leur légère infirmité : une myopie allant jusqu'au strabisme lorsque Sophie était fatiguée. »

Dans une lettre à Gösta du 2 septembre 1884, Hermite[(7)] écrit :

> « Vous m'avez fait mon cher ami grand plaisir avec les numéros que vous m'avez envoyés des deux journaux illustrés danois et suédois qui donnent le portrait de Madame Kowalevski. Mais comme l'original est infiniment au-dessus des deux portraits, où une certaine nuance délicate de bonté toute gracieuse est complètement absente, en laissant une lacune qui a dû aussi vous frapper. »

Dans son journal (13 août 1887, cité dans [24]), Gösta note qu'elle n'a pas les qualités qu'un homme attend d'une maîtresse mais possède celles qu'il attend d'une épouse. Une femme normale, vous dis-je. Morte à quarante-et-un ans, ce qui fait qu'on n'a pas de photo d'elle vieille... Alors on la met dans la galerie des portraits, Sophie, elle acquiert une fonction décorative.

---

(6) Comme dit Ann Hibner Koblitz dans [30] :

> « Tous les collègues me demandent si c'est vrai qu'elle était la maîtresse de Weierstraß — non, pas tous, il y a aussi ceux qui m'apprennent qu'elle l'était. »

Je trouve qu'on ricane beaucoup sur les relations entre Sophie et Weierstraß dans ce milieu. Mais en quoi cela nous concerne-t-il ? Et qui a lu [46] ? Voir aussi [18].

(7) Les lettres d'Hermite à Mittag-Leffler citées dans cet article ont été publiées par Pierre Dugac [21].

Elle est décorative. Mais on ne parle pas beaucoup de ce qu'elle a fait, on ne dit pas beaucoup à quel point ce peut être intéressant. Je lis le livre de Jacqueline Détraz [19], bien sûr, dans lequel il y a une vingtaine de pages de description des travaux mathématiques de Sophie, mais surtout des textes biographiques. Il y a les *Souvenirs d'enfance*, autobiographiques, que je ne trouve pas très passionnants, une ambiance provinciale à la Tchekov ; l'affaire du cours de calcul différentiel d'Ostrogradski servant de papier peint me fait bien un peu rêver ; les relations avec Dostoïevski m'excitent un peu plus, elle a joué la *Sonate pathétique* pour lui, ce qui n'est pas rien, et il ne l'a même pas entendue. Il y a aussi dans le livre le texte d'Anne-Charlotte Leffler, avec son ton mélodramatique, que je n'aime pas du tout, je ne peux pas imaginer que Sophie ait pu faire d'aussi belles mathématiques et avoir été aussi malheureuse, encore moins que la recherche de l'amour ait été sa préoccupation principale.

Quant à moi, à ce moment-là, à l'époque où je travaillais avec Robert Silhol sur [10], je ne m'intéressais ni à la vie ni à la personnalité de Sophie. Je partageais sans le savoir l'avis de Weierstraß, rapporté dans [46], sur la biographie de Kowalevskaya écrite par Anne-Charlotte Leffler :

> « "Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben", il eût suffi que la haute figure de Sonja passât à la postérité par la seule vertu de ses travaux mathématiques et littéraires. »

Un bon endroit pour intercaler des portraits de Gösta Mittag-Leffler[(8)] et de Weierstraß[(9)].

Sophie en Russie. Elle est présente, Sophie, pas seulement sur les murs de la bibliothèque, mais aussi grâce aux collègues russes, à Alexei Reyman, notamment, mais aussi à beaucoup d'autres, dont je vois bien qu'ils portent une appréciation bien plus positive sur l'article [38], qui a bien sûr été traduit en russe et est, là-bas, plus populaire (voir l'article [5] — Appelrot devait être un très vieux monsieur, il a écrit un article sur le solide dès 1892 — et le livre [22] par exemple) — comme quoi parfois le nationalisme a du bon. L'institution russe a attendu que Sophie soit célèbre ailleurs pour la reconnaître et la récupérer, mais elle a fini par le faire.

Je continue à travailler. Arrivent les années 2000. Il y a le théorème de Morales et Ramis à la popularité duquel je vais contribuer et qui relie l'intégrabilité d'un système à une certaine forme de régularité des solutions. Alors ça me donne envie de retourner lire l'article de Sophie.

(8) Je laisse les lecteurs penser ce qu'ils voudront de la juxtaposition de ces deux portraits. Mon avis, c'est que Gösta, avec sa moustache, il n'est pas mal du tout. Et que, voyez-vous, les mathématiciens, c'est comme les mathématiciennes, il y en a des mignons, et puis d'autres qui sont beaucoup moins décoratifs, mais que ce n'est pas ça qui nous intéresse. Et d'ailleurs, on ne me demande pas mon avis.

(9) Les fichiers des portraits de Kowalevski, Noether, Mittag-Leffler et Weierstraß que j'ai reproduits ici viennent du site de Saint-Andrews http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/.

3. L'article sur le solide — un peu de mathématiques

Il me semble que l'on peut aujourd'hui, à la lumière des travaux de ces trente dernières années, faire une évaluation de ce travail beaucoup plus positive que celles que l'on peut trouver dans les ouvrages déjà un peu anciens [16, 19] par exemple. C'est ce que je vais tenter de montrer ici en présentant le contenu des articles [38, 39]. Je vais essayer de séparer l'information du commentaire, expliquant d'abord ce que je considère être un travail mathématique intéressant, puis ce qu'il y a effectivement dans les articles et enfin en quoi ces articles sont, en effet, remarquables.

Ce qui fait qu'un travail mathématique est intéressant. Il y a des tas de réponses possibles à cette question et je ne prétends pas les donner toutes. Il est certain en tout cas qu'un travail

– qui fait avancer un problème sur lequel d'autres ont travaillé,
– en proposant une approche nouvelle à ce problème,
– qui met en évidence la possibilité d'appliquer des techniques nouvelles,
– qui pose de nouveaux problèmes sur lesquels d'autres mathématiciens vont pouvoir travailler
– et dont on recommence à parler quatre-vingt-dix ans après sa publication

est digne d'intérêt.

Ce qu'il y a dans les articles [38, 39]. Ces deux articles contiennent le travail proposé par Sophie pour le prix Bordin.

3.1. Un problème déjà classique. C'est un problème classique, sur lequel ont travaillé Euler, Lagrange et beaucoup d'autres. Il s'agit d'étudier le mouvement d'un solide « pesant » (c'est-à-dire soumis à un champ de pesanteur constant) avec un point fixe. Ce mouvement est régi par des équations différentielles, bien sûr, un système différentiel assez compliqué. Voici la forme sous laquelle on le trouve sur la première page de l'article de Sophie. Les inconnues

$$\boxed{\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}}$$

sont p, q, r, les coordonnées du vecteur de rotation instantanée et γ, γ', γ'' les coordonnées du champ de gravitation Γ. Elles sont écrites dans un repère lié au solide (c'est pourquoi le champ de pesanteur « constant » semble varier ici). Le vecteur (x_0, y_0, z_0) lie le point fixe O au centre de gravité G (lui est fixe... dans le repère mobile), les nombres positifs A, B et C sont les coefficients de la matrice d'inertie,

$$A = \int (y^2 + z^2)\rho\, dx\, dy\, dz, \text{ etc. } (\rho \text{ est la densité})$$

qui reflète la forme du solide (qui est constante, elle aussi, mais qui peut être tout à fait baroque). Voir la figure 1.

Le système différentiel est compliqué, d'ailleurs, au moment ou Sophie s'y attaque, le problème traîne depuis Euler et Lagrange (au XVIII^e siècle). On ne sait pas le résoudre, sauf dans deux cas :

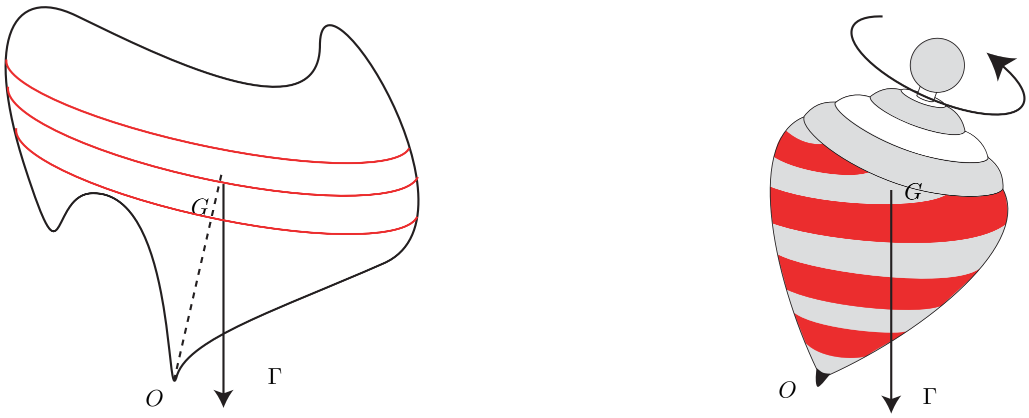


FIGURE 1. Un solide et une toupie

– le cas d'Euler, celui où le centre de gravité du solide est le point fixe, c'est-à-dire où le vecteur (x_0, y_0, z_0) est nul ;
– le cas de Lagrange, celui où la droite joignant le centre de gravité au point fixe est un axe de révolution du solide, c'est-à-dire celui où $A = B$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ — comme c'est le cas pour une toupie (figure 1), si l'on admet que le point de contact de celle-ci avec le sol est fixe ; c'est pourquoi on appelle souvent ces solides des « toupies ».

Ce n'est pas absolument trivial et même pas vraiment simple. Même dans le cas d'Euler, l'axe instantané de rotation du solide n'est pas constant. La résolution fait intervenir des fonctions elliptiques, donc il y a un peu de progrès au XIX$^{\text{e}}$ siècle dans l'écriture des solutions (grâce notamment à Jacobi(10)). L'Académie prussienne des Sciences avait d'ailleurs ouvert un prix de cent ducats, en 1852, puis l'avait refermé quelques années plus tard, sans avoir reçu aucune contribution. On appelait ce problème en Allemagne *die mathematische Nixe* (la sirène mathématique).

3.2. Une approche nouvelle. Venons-en maintenant à ce que fait Sophie. Elle « remarque » que, dans les cas d'Euler et de Lagrange, les solutions du système sont des fonctions *méromorphes* du temps et se demande si cette propriété est encore vraie dans le cas général.

COMMENTAIRES :

– Une fonction méromorphe, c'est une fonction de variable complexe. C'est donc que Sophie a décidé de considérer le temps comme une variable complexe, ce qui était bien sûr plus dans l'air dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle qu'au temps d'Euler.
– C'est une fonction qui a des pôles, c'est donc qu'il y a des valeurs du temps pour lesquelles les solutions explosent, mais ce sont des valeurs que personne n'a jamais vues (aucune des variables décrivant le mouvement d'une toupie n'est jamais partie à l'infini), elles sont imaginaires non réelles... elle a constaté l'existence de singularités invisibles pour des solutions qui n'en avaient pas, de singularités (mais on verra plus bas que ces solutions devaient en avoir, des pôles).

C'est implicite dans [38], mais en général, les solutions d'un système différentiel comme celui-ci ont des singularités bien plus compliquées que de simples pôles (voir page 13). La façon dont Kowalevskaya aborde le problème est alors : est-ce que cette simplicité des singularités (invisibles) pourrait se produire pour d'autres formes du solide ? Elle se demande pour quelles valeurs de la matrice d'inertie et quelles positions du point fixe les solutions peuvent avoir uniquement des pôles.

(10)On trouvera une brève histoire du problème dans [22] (un livre de mathématiques) et dans [16] (un livre d'histoire).

3.3. Découverte du cas de Sophie. Elle résout cette question : il y a les deux cas que nous savons et un autre cas (ce qui va s'appeler la toupie de Kowalevski, c'est ce nouveau cas), où il y a un axe de révolution (comme dans le cas de l'autre toupie, celle de Lagrange), mais cette fois orthogonal à la droite joignant le point fixe au centre de gravité et où, de plus, le solide a une forme particulière, $A = B = 2C$ dans la matrice d'inertie.

3.4. Résolution, première phase. Elle remarque qu'en plus des quantités conservées connues (voir ci-dessous) on en trouve facilement une autre, la fonction

$$K = \left|(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)\right|^2,$$

ce qui permet d'éliminer certaines des inconnues et de ramener le système à une forme plus simple.

Commentaires :

(1) Dans les cas d'Euler et de Lagrange, on sait écrire les solutions explicitement parce que le système est « complètement intégrable », ce que l'on appelle « intégrabilité au sens de Liouville », précisément. Ce qui veut dire qu'il a beaucoup d'« intégrales premières », de quantités conservées au cours du temps. Pour un solide général, on sait que

– la gravitation est constante, donc (au choix près des unités),

$$\|\Gamma\|^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \equiv 1,$$

– de même que le moment par rapport à la verticale (c'est-à-dire à la direction du champ gravitationnel Γ)

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' \equiv c.$$

– Et bien sûr, l'énergie totale est conservée (donc son double aussi)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') \equiv h.$$

Dans les cas de Lagrange et d'Euler, il y a une quatrième[11] quantité conservée, et dans chacun de ces deux cas, on utilise les quatre intégrales premières pour exprimer les solutions comme fonctions elliptiques.

– Dans le cas d'Euler, c'est le carré de la norme du moment cinétique total, dans les notations utilisées ici,

$$K = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

Les solutions du système

$$\begin{cases} \dot p &= \dfrac{B-C}{A}qr \\ \dot q &= \dfrac{C-A}{B}rp \\ \dot r &= \dfrac{A-B}{C}pq \end{cases}$$

paramètrent la courbe elliptique qu'est l'intersection des deux quadriques

$$\begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \end{cases}$$

Ce sont essentiellement des fonctions sn de Jacobi. On exprime ensuite γ, γ' et γ'' à l'aide de ces fonctions.

[11] Il y a six fonctions inconnues, mais le système n'est pas un système à trois degrés de liberté. Pour être brève, je dirai seulement que les deux premières intégrales définissent une sous-variété de dimension 4 de $\mathbf{R}^6$, sur laquelle on regarde le système comme un système, donc, à deux degrés de liberté. C'est pourquoi on recherche une intégrale supplémentaire (en plus de l'énergie).

– Dans celui de Lagrange, c'est le moment de la toupie par rapport à son axe de rotation, $K = Cr$, tout simplement. On élimine toutes les inconnues sauf γ'', qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe de la toupie et que je renomme x et l'on trouve que ce $x = \gamma''$ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2$$

où c et k sont les valeurs des intégrales premières mentionnées ci-dessus et α est une fonction de h et k (qu'il n'est pas indispensable d'écrire précisément). Un changement de variable $X = ax + b$ (où a et b ne dépendent que de ce polynôme de degré 3 (et donc que des valeurs des intégrales premières) ramène le polynôme à la forme $4X^3 - g_2X - g_3$, la solution générale de notre équation différentielle est alors

$$x = \frac{1}{a}(\wp(at - D) - b)$$

où a et b ont déjà été définis, D est une constante d'intégration et $\wp$ désigne la « fonction $\wp$ de Weierstraß » associée au réseau correspondant au polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$. La

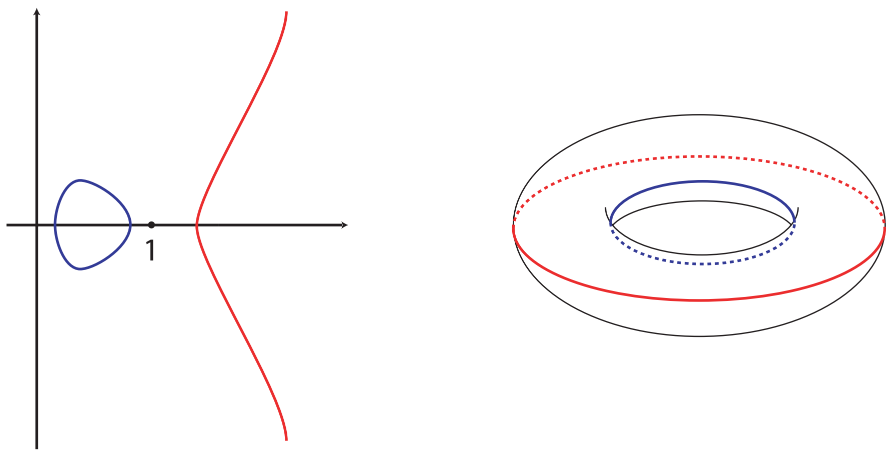


FIGURE 2. Courbe de genre 1

figure montre la courbe d'équation $y^2 = P(x)$, plus précisément sa partie réelle à gauche et la courbe complexe elle-même à droite (avec un point « à l'infini » rajouté sur la courbe rouge), qui est isomorphe au quotient de $\mathbf{C}$ par le réseau définissant la fonction $\wp$.

Dans le cas représenté, le polynôme P a, comme celui obtenu pour la toupie, trois racines réelles (dont deux entre -1 et 1 et une plus grande que 1), d'où la forme particulière de la courbe avec ses deux composantes. La courbe complexe elle, a toujours la forme d'un tore. C'est ce qu'on appelle une courbe elliptique, une courbe de genre 1. Pour continuer à exploiter cet exemple, remarquons que la fonction $\wp$ a un pôle double en chaque point du réseau, et donc que nos solutions ont aussi des pôles doubles, mais que l'emplacement de ceux-ci dépend de la solution considérée, *via* la constante d'intégration D. C'est ce que l'on appelle des pôles « mobiles » (voir plus bas le § 3.6.2).

Et pour en finir avec la toupie, ces pôles ne sont pas réels, ce que l'on voit clairement sur la figure 2. La composante de la courbe réelle qui donne des solutions réelles est la composante compacte ($x = \gamma''$ doit être ≤ 1), le point à l'infini (qui correspond, *via* $\wp$) aux points du réseau, est, lui, sur l'autre composante. Ce sont bien des pôles « invisibles » comme je les ai qualifiés ci-dessus.

(2) Ce qui pose la question de savoir comment on trouve une intégrale première. Dans le cas de la toupie, on l'a vu, c'est la physique (ou la géométrie du problème) qui donne la réponse. D'autre part, une fois que l'intégrale est écrite, il n'est pas bien difficile de vérifier (en dérivant par rapport au temps) que c'est en effet une quantité conservée.

(3) Ce qui pose surtout la question du rapport entre le fait que les solutions soient méromorphes, ce qu'a supposé Sophie, et le fait qu'il y ait une intégrale première supplémentaire, qui arrive dans l'article de façon assez abrupte et étonnante[(12)]. J'y reviendrai.

3.5. Résolution, deuxième phase. Ce que veut faire Sophie, pour le prix Bordin, c'est *résoudre* le système. Elle ramène le système différentiel à

$$0 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

$$dt = \frac{s_1\,ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2\,ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

où R est un polynôme de degré 5. C'est complètement analogue au $\dot{x}^2 = P(x)$ dans le cas de la toupie, que nous aurions aussi pu écrire

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

Il reste une cinquantaine de pages de changements de variables, démonstrations et calculs pour arriver à exprimer effectivement les solutions en termes de fonctions ϑ de deux variables. Celles-ci sont les analogues en dimension 2 de la fonction $\wp$: au lieu d'un polynôme de degré 3 et d'une équation, elle a un polynôme de degré 5 et deux équations.

Commentaires :

(1) Un des passages du système différentiel originel au système que je viens de recopier dans [38] est qualifié traditionnellement de « mystérieux changement de variables ». Citons ici Cooke [16, pp. 156-7] :

> « This string of transformations is certainly formidable and gives evidence of either tremendous combinatorial ability or prodigious patience, or both. »

J'avoue qu'il y a beaucoup de « mystères » que je trouve plus profonds et plus fondamentaux que la seule habileté de Sophie. Et que cette « habileté » ne me semble pas très éloignée d'une douteuse « intuition féminine »...

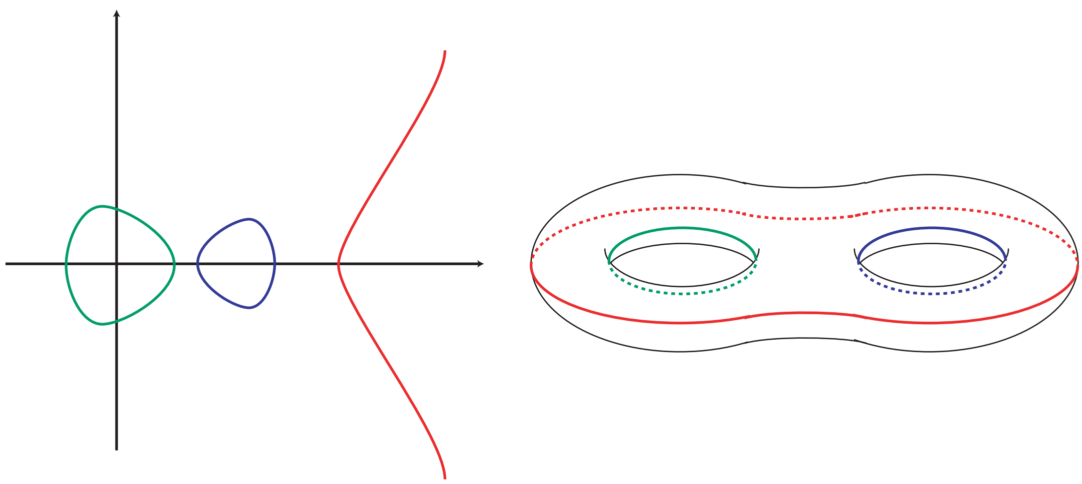


Figure 3. Courbe de genre 2

[(12)]Bizarrement, dans son évaluation du travail scientifique de Sophie dans [16], Cooke ne relève pas le caractère surprenant de cette remarque, qui est pourtant noté par exemple par Golubev, au début des années 1950, dans [22] (un ouvrage que Cooke lui-même cite). C'est d'ailleurs aujourd'hui toujours aussi mystérieux.

(2) Cette fois, il y a une courbe hyperelliptique de genre 2 (celle d'équation $y^2 = R(x)$, pour ce polynôme R de degré 5, voir la courbe et sa partie réelle sur la figure 3).

(3) Quand on en est au système sous la forme donnée ci-dessus, eh bien, on sait qu'on a, en théorie, le résultat, les solutions s'expriment en termes de fonctions ϑ (la courbe est de genre 2, ce sont donc des fonctions ϑ de deux variables, de même que les fonctions elliptiques des cas d'Euler et de Lagrange s'expriment en termes de fonctions ϑ d'une variable). Mais, je l'ai déjà dit, Sophie veut résoudre, vraiment résoudre. Et les fonctions abéliennes, elle connaît.

(4) Je vais évoquer plus bas une façon naturelle d'arriver à ce système et à son intégrabilité dont on verra qu'elle fera intervenir une courbe de genre 3. Et, ma foi, un nouveau mystère, les relations entre cette courbe et celle de Sophie.

3.6. Actualité et modernité de [38, 39]. Commençons par ce que relèvent les commentateurs (anciens ou modernes).

(1) La Commission qui attribue le prix relève surtout l'utilisation des fonctions ϑ de deux variables, c'est la première fois que ces nouvelles fonctions sont utilisées pour résoudre un problème indépendant de la théorie des fonctions. L'intitulé du prix était :

> « Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide »

Non seulement, le problème posé a avancé, la théorie du mouvement d'un corps solide a été « perfectionnée », mais en plus, à l'aide de ces nouvelles fonctions que l'on est heureux de voir enfin appliquées.

(2) J'ai déjà mentionné le célèbre « mystérieux » changement de variables.

(3) On note aussi la « bizarrerie » du cas de Sophie, on n'a jamais vu de « toupie de Kowalevski », on peut bien sûr en dessiner une, il y a par exemple une figure dans [50], mais c'est vraiment artificiel. D'ailleurs, Cooke mentionne dans [16] et me confirme en m'envoyant une lettre de Weierstraß à Schwarz, que le maître avait demandé à son autre « élève préféré » d'en fabriquer une pour Sophie (qu'il appelle « Frau K. » dans cette lettre), ah ! quel bonheur d'avoir un élève bricoleur !

(4) Le mouvement lui-même, fonctions ϑ ou pas, est très compliqué. Je cite encore Roger Cooke [16, p. 159] :

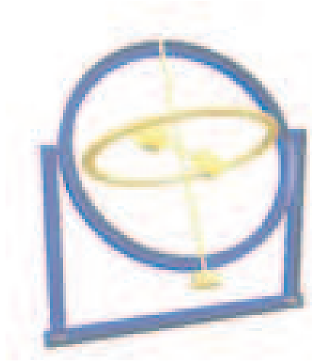
> « The Kovalevskaya case is so complicated that no simple description of the motion as a whole is possible.
>
> The case seems to be of no practical value(13) ; and indeed one finds that physics text books rarely mention the result and never investigate it nowadays. »

Il me semble qu'avec le recul que nous donnent les presque cent vingt années écoulées, on peut faire une analyse plus détaillée.

3.6.1. Le mouvement est trop compliqué. Ça ne me semble pas le plus important, alors je vais commencer par le dernier point. Avec un ordinateur, la vie est plus facile et les solutions compliquées deviennent simples. Je renvoie aux travaux de Richter, Dullin et de leurs collaborateurs. La toupie de Kowalevski tourne en permanence sur le site du groupe de physique non linéaire de l'université de Brême `http://www-nonlinear.physik.uni-bremen.de` et dans le DVD *Kowalewskaja Kreisel* de Richter, Dullin et Wittek [53]. Je ne sais pas si le gyroscope qu'avait fabriqué Schwarz ressemblait à ça, mais c'est la toupie de Kowalevski de Brême que l'on voit ici. C'est une approximation, a commenté Peter Richter en m'envoyant le fichier, c'est

(13) Contester la « valeur pratique » du cas en question est aussi légitime qu'il serait légitime de contester la « valeur pratique » de l'étude de la résolubilité par radicaux d'équations que l'on sait résoudre, au moins depuis Newton, de façon aussi précise que l'on puisse le souhaiter. Nul·le n'ignore que cette question sans valeur pratique a fait résolument avancer les mathématiques (et leurs applications) depuis Galois et Abel.

la distribution de masse dans la partie jaune qui est celle requise par Sophie, mais la suspension ne peut pas vraiment être négligée.



3.6.2. La propriété « de Painlevé ». D'abord, Sophie a « lancé » la propriété de Painlevé. Painlevé va étudier plus généralement les équations différentielles (dans le champ complexe) dont les singularités des solutions sont assez simples. Pour un système différentiel non linéaire, les singularités des solutions peuvent être des pôles, des points de branchement avec éventuellement une infinité de branches, etc. De plus, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un système linéaire, l'emplacement de ces points singuliers peut dépendre de la solution considérée (de ses conditions initiales) et pas seulement des coefficients de l'équation. C'est ce que l'on appelle des « singularités mobiles ». En voici deux exemples un peu bé-bêtes :

– l'équation $y' = -y^2$, dont les solutions non nulles sont les $y = \dfrac{1}{t-c}$, dont le pôle en c dépend de la solution choisie et ne se voit pas sur les coefficients de l'équation, comme c'était le cas pour les solutions dans le cas de Lagrange (voir ci-dessus le commentaires au § 3.5),

– et l'équation $yy' = \frac{1}{2}$, dont les solutions sont les $\sqrt{t-c}$ et ont un branchement d'ordre 2, mobile lui aussi.

Un peu moins bé-bête est l'exemple de l'équation différentielle

$$y'' = y'^2 \, \frac{2y-1}{y^2+1}$$

donné par Painlevé dans [49] et dont la solution générale,

$$y = \tan(\log(At - B))$$

a, au point « mobile » B/A un point de branchement et une singularité essentielle[14].

On dit aujourd'hui qu'une équation différentielle a « la propriété de Painlevé » lorsque les seules singularités mobiles de ses solutions sont des pôles (la première des deux équations bé-bêtes ci-dessus a la propriété de Painlevé, la deuxième non). C'est une petite extension de la propriété utilisée par Sophie, qui demandait, elle, que toutes les singularités soient des pôles. Il me semble que ce qu'a commis Sophie, c'est un « plagiat par anticipation » (je l'ai déjà qualifié ainsi dans [8]), d'ailleurs des spécialistes de systèmes intégrables (voir par exemple l'article [3]) n'hésitent pas à parler de « propriété de Kowalevski » ou « de Kowalevski-Painlevé », ce qui est plus juste. La différence entre la propriété demandée par Painlevé et celle demandée par Sophie est décrite par Painlevé tout à la fin[15] de [49], ce qu'elle a cherché, ce sont

[14] Comme l'a démontré Painlevé, pour avoir un comportement de ce type, il faut une équation d'ordre au moins 2.

[15] Je trouve le ton de cette fin d'article, dans lequel Sophie n'a pas encore été mentionnée, un brin condescendant. Il dit en effet, un peu plus bas,

> « Mais, si intéressante que soit la voie suivie par M$^{\mathrm{e}}$ Kowalevski, il était désirable de reprendre la question d'une façon plus rationnelle. »

> « les cas où le mouvement du solide est défini par des *fonctions méromorphes de t qui possèdent effectivement des pôles*. Son procédé laisse échapper les cas où ces fonctions seraient uniformes sans avoir de pôles, soit qu'elles fussent *holomorphes*, soit que leurs singularités fussent transcendantes. »

On pourra se reporter à la citation d'Adler et van Moerbeke dans [2], reproduite ici dans la note 18. Ces auteurs considèrent qu'elle voulait utiliser des variétés abéliennes (cachées derrière les fonctions ϑ). Or celles-ci sont algébriques (ne nous occupons donc pas des singularités transcendantes) et projectives, donc il y aura, forcément, des pôles. En d'autres termes, la question que pose Sophie est celle de l'intégrabilité algébrique, de ce qu'Adler et van Moerbeke vont définir en 1982 comme étant l'intégrabilité algébrique.

***Remarque*.** Painlevé aura lui aussi le prix Bordin, à peine six ans après Sophie, en 1894. Le sujet du prix sera cette année-là :

> « Étude des problèmes de Mécanique analytique admettant des intégrales algébriques par rapport aux vitesses et particulièrement des intégrales quadratiques »

et le rapport de la Commission notera

> « enfin une application des équations différentielles ordinaires dont les solutions ont des singularités fixes »

(en d'autres termes dont toutes les singularités mobiles sont des pôles)[16]. On notera la proximité avec l'approche de Sophie, où il n'y a que des pôles... et une intégrale première algébrique. On est vraiment dans le même domaine, ce qui m'amène à la remarque suivante.

3.6.3. L'intégrabilité au sens de Liouville. Un système est « intégrable au sens de Liouville » s'il possède « assez » d'intégrales premières, ce qui est une définition très vague mais peut être précisé (voir par exemple [8]). Il faut en plus que ces intégrales commutent (au sens du crochet de Poisson), ce que je ne vais pas non plus expliquer ici. Toutes ces intégrales premières permettent de résoudre le système par quadratures, en principe. L'apparition abrupte de l'intégrale K dans le cas de Sophie peut aussi se dire comme un énoncé de théorème :

***Théorème* (Kowalevski [38]).** *Lorsque les équations du solide ont la propriété de Kowalevski-Painlevé, le système est intégrable au sens de Liouville.*

D'ailleurs, dans le travail déjà mentionné et qui lui a valu le prix Bordin, Painlevé utilise sa propriété pour (re-)démontrer que le problème de trois corps n'est pas intégrable (avec des intégrales premières algébriques).

3.6.4. D'où sortent toutes ces courbes ? Il y a la courbe de genre 2 issue du mystérieux changement de variables. Les courbes spectrales de [12]. Des courbes elliptiques aussi. C'est encore une question sur laquelle un peu d'encre a coulé depuis (voir notamment [43]).

3.6.5. Qu'est-ce que c'est que ce cas bizarre ? La question du solide pesant est naturelle, il est tout aussi naturel d'étudier les mouvements d'un solide dont le centre de gravité est fixé (cas d'Euler) ou d'une toupie, mais la toupie de Kowalevski, qu'est-ce que c'est ? On n'arrive même pas à la dessiner, cette soi-disant toupie ! Voir la phrase de conclusion de l'analyse de Cooke [16, p. 164]

Ah ! ces femmes ! Irrationnelles ! Mais pas transcendantes...

(16) Je ne résiste pas au plaisir de faire remarquer aussi que, pour Sophie, la Commission s'est félicitée que l'on *applique* enfin les fonctions ϑ de deux variables à un problème de mécanique (voir ci-dessous), de même que pour Painlevé, elle se félicite que sa théorie des équations différentielles s'applique... On croirait un rapport d'une commission du CNRS au XXI^{e} siècle.

> « [...] but since the case to which it applies is rather special, the details of the arguments are no longer worth troubling about. »

Il est vrai que l'on s'est arrêté assez vite de s'intéresser aux systèmes intégrables, après que Poincaré ait démontré qu'il y en avait fort peu... Jusqu'à ce que la théorie des représentations (voir [27, 33]), l'utilisation de fonctions ϑ pour l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type Korteweg-de Vries

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

(surtout dans l'article [20])(17) et celle des algèbres de Lie affines (travaux d'Adler et van Moerbeke(18), voir [2, 3, 4], de Reyman et Semenov-Tian-Shanski, et je ne pense pas seulement à [12], source de [10]) remettent, depuis une trentaine d'années, le sujet à la mode. Le cas de Kowalevski est resté très mystérieux jusqu'à il y a environ une quinzaine d'années (un siècle après « notre » article), lorsque un très beau travail [52] a révélé que la « toupie de Kowalevski » n'est pas si bizarre que ça, puisqu'elle est la manifestation dans notre dimension 3 d'espace d'une famille de « toupies » qui apparaissent de façon parfaitement naturelle en dimensions plus grandes, au cœur-même des relations entre intégrabilité et algèbres de Lie affines. Et dont on sait donc exactement pourquoi ils sont intégrables (au sens de Liouville). C'est d'ailleurs grâce à cette description que l'on a pu trouver la belle paire de Lax [12] que Robert et moi avons utilisée.

3.6.6. Et après ? Les relations entre la propriété de Kowalevski-Painlevé (une forme de régularité des solutions) et l'intégrabilité au sens de Liouville (une forme de régularité géométrique) ne sont toujours pas éclaircies en général. Voir [58].

La question posée est : comment prouver qu'un système n'est pas complètement intégrable ? On a vu que l'on pouvait trouver des intégrales premières grâce à des arguments physiques ou géométriques (des considérations de symétrie) comme dans les cas d'Euler et de Lagrange dans le problème du solide. On a vu aussi Sophie trouver sa moins évidente intégrale première K. Mais que se passe-t-il lorsque l'on n'en trouve pas ? Le théorème de Morales et Ramis (voir par exemple [47, 8]) fait jouer un rôle de détection important à des groupes de symétrie un peu cachés, les groupes de Galois différentiels. Brièvement : on regarde le système différentiel avec

(17)Dans l'introduction de cet article, Dubrovin, Matveev et Novikov reproduisent un extrait d'une lettre citée dans [22] dans laquelle Sophie écrivait avoir dit à Picard que les fonctions de la forme

$$y = \frac{\vartheta(cx+a, c_1x+a_1)}{\vartheta_1(cx+a, c_1x+a_1)}$$

pouvaient être utiles pour intégrer certaines équations différentielles, et que ce dernier avait montré un certain scepticisme, ce qu'ils commentent ainsi :

> « l'analyse faite par les auteurs montre que les doutes de Picard n'étaient justifiés que pour les quatre-vingt-dix ans séparant l'article de Kowalevskaya et le travail de 1974 sur les équations KdV. Ils ne le sont plus désormais. »

Décidément, Sophie n'a pas de chance, la traduction en anglais de cet article en russe fait un contre-sens à cet endroit, comme le signale Ann Hibner Koblitz [31]. Notons quand même que ce travail est l'un des premiers, peut-être le premier dans lequel ces fonctions apparaissent dans les solutions d'un système différentiel depuis [38]. Mais ce n'est pas fini...

(18)Le deuxième paragraphe de l'introduction de [2] dit :

> « This paper deals with a criterion for complete integrability, inspired by work of Kowalewski. In celebrated papers [...], she has shown that the *only* algebraically completely integrable systems among the rigid body motions are Euler's rigid body, Lagrange's top and the famous Kowalewski top. Her method is based on the idea that if the system is to be algebraically completely integrable, and if the phase variables of the problem are to be algebraic (abelian) functions, then the phase variables of the problem must be meromorphic in time. In addition, the trajectories which blow up (as they must) are nicely parametrized by a codimension one family of parameters. [...] The sufficiency of this criterion has not been established. »

une sorte de microscope, le long d'une de ses solutions, précisément les solutions infiniment proches d'une solution donnée. Il y a un groupe qui rend compte de ces solutions proches (à l'ordre 1). C'est un groupe assez gros (un groupe algébrique). Si le système est complètement intégrable, ce groupe est presque commutatif : la commutation (au sens du crochet de Poisson) et l'abondance des intégrales premières se traduit pas une propriété de commutativité du groupe. Au-delà des applications de ce théorème, remarquons qu'il lie une propriété de régularité des solutions (comme celle de Kowalevski) à savoir le fait que le groupe de Galois n'est pas trop compliqué à l'intégrabilité (au sens de Liouville). Voir aussi [48] pour une discussion plus détaillée(19).

Maintenant que la théorie de Galois différentielle [47] permet d'appréhender mieux les différentes notions d'intégrabilité, il est sans doute temps de revaloriser les qualités novatrices et révolutionnaires du travail de mathématicienne de Sophie Kowalevski.

Bref, je trouve (enfin) cet article remarquable !

4. Présence de Sophie (suite)

Il y a Andrei Bolibroukh, qui vient à Strasbourg chaque année. Nous nous voyons un peu, pour des raisons professionnelles et aussi familiales. Il parle avec moi, il me parle en particulier de Sophie dont il admire le travail et la brillante personnalité. C'est peut-être à cause du ghetto des femmes qu'il m'en parle, peut-être aussi parce qu'il sait que j'ai écrit l'article avec Robert, qui sait ? On ne saura plus.

Et puis il y a le roman *Une nihiliste* [34], que j'aperçois sur une table de la librairie Kleber (pendant que Jean-François Peyret le découvre au BHV, mais je ne le sais pas encore) et que, bien entendu, j'achète et je lis. Assez décevant.

Et il y a [42] pour lequel je sers de referee, et dans lequel Andrzej Maciejewski et Maria Przybylska redémontrent en utilisant le critère galoisien de Morales et Ramis (un théorème de Ziglin [59] qui dit que) que le solide pesant n'est intégrable, au sens de Liouville, que dans les cas évoqués ci-dessus (Euler, Lagrange, Kowalevski).

Une ambiance, Sophie est dans l'air, dans le mien en tout cas, mais pas seulement, on va le voir. En octobre 2004, je vais à Bordeaux où l'on me fait visiter la bibliothèque, qui s'orne d'un buste bleu-vert réalisé par Jan-Erik Björk et représentant Sophie (une version colorée de celui qu'il a confectionné pour le jardin de l'Institut Mittag-Leffler). En novembre, je suis au CIRM lorsque je décide de me pencher sur le solide, moi aussi. À cause d'Andrei. Je fais un exposé autour de l'article de Sophie au colloque Bolibroukh, j'en reparlerai en janvier 2005 au congrès franco-islandais à Reykjavik, un article écrit en français par une femme russe et publié dans un journal scandinave(20) !.. J'écris un papier pour le volume du colloque Bolibroukh, moins bien que je ne l'aurais voulu, merci à Andrzej Maciejewski de m'avoir signalé quelques erreurs dans une première version.

Le cas de Peyret. Un soir, coup de fil de Jean-François Peyret, que je ne connais pas encore, il m'appelle pour me parler de théâtre et de Sophie. Ignare que je suis, j'avoue que je crains le pire. Il monte une pièce (comprends-je) sur Sophie, il a lu [19] et contacté Jacqueline Détraz et celle-ci lui a dit de m'appeler aussi. J'avoue ici un peu de réticence, à cause du ghetto des femmes mais pas seulement, en plus j'ai un peu de mal à quitter Strasbourg en ce printemps, je finis quand même par aller passer une après-midi à Chaillot avec la bande à Peyret et j'avoue

(19) Juan Morales conclut son article en remarquant que la théorie de Galois différentielle (ou théorie de Picard-Vessiot) est née en même temps que la toupie de Kowalevski.

(20) Je suis candide et j'ignore absolument à ce moment-là les opinions violemment négatives sur Sophie exprimées il y a à peine vingt ans par les éditeurs dudit journal — voir [31] et ici page 22 et note 41.

aussi que je suis complètement séduite. Encore plus à Avignon, lorsque je passe quelques jours à la Chartreuse avec la bande à Peyret et où j'adore le spectacle fini (?).

Le cas de Sophie K. (de Jean-François Peyret). J'écris (sous ce titre) une critique pour la *Gazette*, excusez-moi du peu(21), dont je reproduis ici un extrait (voir [9]).

[...]

Le « cas de Sophie K » est donc une sorte de gyroscope, mais c'est aussi le cas d'une personnalité aux facettes multiples, mathématicienne, révolutionnaire, romancière [...] et, pour ceux qui préfèrent les arguments d'autorité(s), amie de Dostoïevski, première femme docteur en mathématiques [à l'exception peut-être d'Agnesi à Bologne au XVIIIe siècle], épouse du traducteur de Darwin en russe, élève de Weierstraß, j'en passe, et tout ça vite, vite, trop vite, existence ardente et fulgurante — Sophie K. meurt à quarante ans (sic), d'une pneumonie. Oui, c'était le XIXe siècle, et Sophie était une mathématicienne aux prises avec son siècle, avec les maux de son siècle, misogynie et pneumonie notamment. Encore aux prises avec les nôtres (de siècles) où, si l'on meurt moins de pneumonie, sa brillante personnalité est plutôt méconnue, dans le monde même qui devrait être capable de mesurer la qualité de son apport à la science. J'y reviendrai aussi.

[...]

Pour éviter les malentendus, je précise que, de l'œuvre mathématique de Kowalevskaya, je ne connais que l'article sur le solide [38], que ce n'est *pas* parce que la personnalité de son auteur m'intéressait que j'ai travaillé sur ce sujet mais à l'inverse [...] parce que je travaillais sur les systèmes intégrables que j'ai dû lire cet article (que j'ai trouvé si beau que j'ai eu envie d'en parler), que Kowalevskaya a fait bien d'autres choses (Cauchy-Kowalevskaya, les anneaux de Saturne,...), pour lesquelles je renvoie à sa bibliographie dans [19].

Comme on le voit, je suis aussi (enfin !) séduite par la personnalité de Sophie. Je ne vais pas tarder à penser comme Cooke [18] :

> « [...] the more I reflect on her life and consider the magnitude of her achievements set against the weights of the obstacles she had to overcome, the more I admire her. [...] To venture, as she did, into academia, a world almost no woman had yet explored, and to be consequently the object of curious scrutinity, while a doubting society looked on, half-expecting her to fail, took tremendous courage and determination. To achieve, as she did, at least two major results of lasting value to scolarship, is evidence of a considerable talent, developed through iron discipline. »

Je voudrais aussi insister sur la profonde unité des différentes facettes de Sophie. Le fait qu'elle ait été mathématicienne *et* écrivain est indissociable de ses convictions politiques. Sophie était une nihiliste, les nihilistes pensaient que les hommes et les femmes, égaux, devaient contribuer à l'élévation du niveau de connaissances du peuple — ce qui, dans la Russie du XIXe siècle, n'était pas un mince programme. Je renvoie à l'excellente préface du livre [32].

5. Le 24 décembre 1888 à l'Académie

Au pied de la première page de [38], il y a une note qui indique que ce travail a obtenu le Prix Bordin de l'Académie des Sciences, augmenté de 3000 à 5000 francs. Alors que je n'avais pas encore lu l'article en détail, j'avais mentionné à un de mes collègues que ça devait être exceptionnel, puisque l'Académie des Sciences avait augmenté le montant du prix. « Oh ! Non, non, c'était pour l'aider, parce qu'elle n'avait pas de poste », m'avait-il répondu. Un peu de

(21)Le genre de peu qui plait à Jean-François... La *Gazette* n'est pas *Nature*, mais enfin...

condescendance, là aussi, dans une façon subtile de rabaisser le niveau d'un travail dont, en effet, l'Académie des Sciences avait reconnu le caractère exceptionnel. Il est bien établi, par des lettres de Hermite à Sophie et à Gösta Mittag-Leffler, dès juin 1886 (citées dans [16] par exemple) que la question posée pour le prix Bordin de 1888, à savoir

> « Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide »

a été taillée sur mesure pour reconnaître publiquement la valeur d'un travail dont la communauté mathématique française n'ignorait rien. Et il est tout aussi bien établi que c'est bien parce que le travail était exceptionnel que le prix avait été augmenté. Hermite écrit à Gösta le 10 décembre [21] :

> « En vous annonçant que le mémoire de Madame Kowalevski serait couronné par l'Académie, je vous avais demandé de garder ma communication pour vous seul, mais aujourd'hui j'ai reçu de Mr Bertrand la mission, qui me fait le plus grand plaisir, d'informer *officiellement* Madame Kowalevski que non seulement le prix Bordin lui est décerné, mais qu'en raison du mérite exceptionnel de son travail l'Académie, sur sa proposition, a augmenté la valeur du prix au moyen des fonds dont elle dispose, et l'a porté à 5000 F. »

Il n'est pas tout à fait vrai non plus que Sophie n'avait pas de poste, elle enseignait à l'université de Stockholm depuis 1883, d'abord comme *Privatdozent* (si je comprends bien, ça veut dire que son « salaire » lui venait directement de ses étudiants), rapidement comme professeur pour cinq ans ; le prix l'aida certainement à obtenir le poste de professeur à vie (mais il lui restait si peu à vivre) en 1889.

À Paris en décembre 2005 et parce que j'ai commencé à écrire ce texte, je passe des heures à la bibliothèque de l'IHP (notre coffre ne contient pas de volume des *Comptes rendus* antérieur à 1908 ; bien sûr, en cas d'impossibilité d'accès aux épais volumes poussiéreux, il y a la version numérisée sur le site `http://gallica.bnf.fr`) où je me délecte à lire le compte-rendu de cette fameuse séance de remise du prix Bordin [1, p. 1031 et suivantes]. C'est la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences. Solennelle.

Discours de M. Janssen, le président. Ah ! ce discours ! Il commence par

> « rappeler le souvenir de ceux de nos confrères que nous avons eu la douleur de perdre depuis notre dernière séance annuelle »

en particulier, du général Perrier (encore un général) mort en février à l'âge de cinquante-quatre ans, qui a exécuté

> « cette opération grandiose réputée jusque là presque irréalisable, à savoir, la réunion géodésique de l'Espagne avec l'Algérie par-dessus la Méditerranée.
>
> Ce beau succès donnait à la Géodésie un arc continu s'étendant du nord de l'Angleterre jusqu'au Sahara, c'est-à-dire dépassant en étendue les plus grands arcs mesurés jusqu'alors »

(encore un géodésiste, au fait vous ai-je dit que j'ai appris entre temps que l'autre, le général Schubert, celui que Weierstraß citait dans [55], était le grand-père maternel de Sophie, peut-être selon [16] une des raisons qui ont incité le « maître » à accepter la petite-fille comme élève), de ce grand ingénieur rural que fut Hervé Mangon, je vous passe les autres, il félicite ensuite l'amiral Jurien de la Gravière, élu membre de l'Académie Française (on s'y attendait mais il ne faut jurer de rien), et enfin, ce que nous attendons tous,

> « Messieurs(22), parmi les couronnes que nous allons donner, il en est une des plus belles et des plus difficiles à obtenir qui sera posée sur un front féminin.

(22) C'est une séance publique, mais à qui s'adresse-t-il ainsi au masculin ? J'ai cru comprendre que Sophie était dans la salle.

> M$^{\text{me}}$ de Kowalewski[(23)] a remporté cette année le grand prix des Sciences mathématiques[(24)]. Nos confrères de la section de Géométrie, après examen du mémoire présenté au concours, ont reconnu dans ce travail, non seulement la preuve d'un savoir étendu et profond, mais encore la marque d'un grand esprit d'invention.
>
> M$^{\text{me}}$ de Kowalewski est professeur à l'Université de Stockholm, où elle forme de savants élèves. Elle descend du roi de Hongrie Mathias Corvin[(25)], qui non seulement fut un grand guerrier, mais qui fut encore un protecteur éclairé des Sciences, des Lettres et des Arts.
>
> Ce sont évidemment ces dernières qualités dont M$^{\text{me}}$ de Kowalewski a tenu à hériter de son Illustre ancêtre, et nous l'en félicitons. »

J'ai compté, primés ou nominés, ils sont presque soixante cette année-là, Sophie est la seule mentionnée par le président Janssen. Le compte-rendu de cette séance exceptionnelle s'achève par le programme des prix pour l'année suivante. Le prix Bordin (revenu à 3000 Frs) porte sur des exemples de surfaces sur lesquelles

$$ds^2 = (f(u) - \varphi(v))(du^2 + dv^2).$$

La version publiée est suivie des rapports des commissions sur les prix. Comme on peut s'y attendre, les mathématiciens sont les plus concis des académiciens. Si je comprends bien, on donne le prix à un mémoire anonyme (dans le cas qui nous intéresse et d'ailleurs probablement dans presque tous les cas qui nous intéressent, l'anonymat est très relatif, la communauté sait parfaitement qui travaille sur quoi et comment, et Sophie était, je l'ai dit et répété, membre à part entière de la communauté mathématique européenne) qui est identifié par une sorte de code, une phrase, une devise, que l'on retrouve sur un pli cacheté qui renferme le nom et l'adresse de l'auteur, lequel pli cacheté n'est ouvert que lorsque le mémoire gagnant a été choisi. Les perdants restent anonymes et peuvent publier leur travail où ils veulent. Cela n'apparaît pas dans le rapport que je vais reproduire ici mais Sophie écrit à Gösta qu'il y avait quinze candidats (cité dans [16]). La commission est formée de Maurice Lévy, Philips, Resal, Sarrau, le rapporteur est Darboux. Il commence par rappeler la question, puis présente et explique le choix de la Commission.

> « À l'unanimité, la Commission décerne le prix au Mémoire inscrit sous le n°2 et portant la devise : *Dis ce que tu sais, fais ce que dois, advienne que pourra.* Ce remarquable travail contient la découverte d'un cas nouveau dans lequel on peut intégrer les équations différentielles du mouvement d'un corps pesant, fixé par un de ses points. L'auteur ne s'est pas contenté d'ajouter un résultat du plus haut intérêt à ceux qui nous ont été transmis sur ce sujet par Euler et par Lagrange : il a fait de la découverte que nous lui devons une étude approfondie dans laquelle sont employées toutes les ressources de la théorie moderne des fonctions. Les propriétés des fonctions ϑ à deux variables indépendantes permettent de donner la solution complète sous la forme la plus précise et la plus élégante ; et l'on a ainsi un nouvel

(23) D'où sort-il le « de », ou, doit-on le comprendre comme un génitif ? Et, remarquez, il y met deux W. Gösta aussi, dans [46], mais il la décore d'un Y... alors que dans [45], elle a bien le Y mais elle a deux V. Et encore, je n'ai pas (encore) copié le « Sophie von Kowalevski » des Allemands (voir par exemple [41]). Vous pouvez vous amuser à compter combien de graphies différents du nom de Sophie apparaissent dans cet article et sa bibliographie : j'ai été cohérente, n'utilisant que Kowalevski et Kowalevskaya, mais j'ai aussi cité les autres avec leur orthographe.

(24) Il est tellement impressionné qu'il se trompe de le prix. Le grand prix des Sciences mathématiques cette année-là, c'est à Picard qu'il va, aussi avec un sujet fait sur mesure :

> « Perfectionner la théorie des équations algébriques de deux variables indépendantes. »

(25) Pour le général Schubert, il ne devait pas savoir, sinon il aurait fait un parallèle avec Perrier.

et mémorable exemple d'un problème de Mécanique dans lequel interviennent ces fonctions transcendantes, dont les applications avaient été bornées jusqu'ici à l'analyse pure ou à la Géométrie [...] »

6. La réputation de Sophie

Les hommes de son temps. Sophie a été victime de la misogynie de son temps. On le sait. Il ne lui était pas même possible d'*assister* aux cours de Weierstraß à l'université de Berlin (il lui répétait ce cours le dimanche après-midi, chez lui !), alors être nommée professeur... Gösta exprime dans [46] l'idée que, si elle a pu avoir le poste à Stockholm si facilement(26), ce n'est pas parce que les Suédois étaient plus avancés que les Russes ou les Allemands, mais parce que c'était une université nouvelle(27) :

> « Son engagement réussit surtout grâce à une sorte de surprise qui ne donna pas le temps à l'opposition de s'organiser suffisamment ».

Et il ajoute

> « Les véritables difficultés vinrent après. Les manifestations de cette hostilité sont encore trop récentes(28) pour que je puisse soumettre à tout le monde la correspondance afférente qui un jour dévoilera un grand nombre d'intérieurs curieux des républiques savantes non seulement de Stockholm et d'Upsala mais encore de Berlin, de St. Pétersbourg et d'autres centres de culture internationale. »

Pourtant, en ce temps-là, elle était soutenue par la plupart de ses collègues. Les deux historiens américains que j'ai déjà cités, Roger Cooke et Ann Hibner Koblitz, affirment dans [16, 30, 29, 14] que Sophie était membre à part entière de la communauté mathématique occidentale. Elle participait à cette élite, on la consultait, par exemple(29) à propos du mémoire que Poincaré allait proposer pour le prix des soixante ans du roi Oscar II (le mémoire dont Jean-Christophe Yoccoz a parlé dans sa conférence à la BNF le 13 avril 2005, voir [57]) ; elle et Hermite, elle et Weierstraß s'écrivaient beaucoup (on sait que Weierstraß a brûlé les lettres de Sophie après sa mort, voir quand même le récit émouvant de la découverte d'une de ces lettres disparues dans [13]). Catherine Goldstein me confirme l'excellence de sa réputation. Je cite son message et ajoute en notes les références précises par lesquelles elle l'a complété :

> « Aucun doute là-dessus. Hermite sollicité par Mittag-Leffler répond positivement, mais avec quelque hésitation, principalement faute d'une connaissance approfondie des articles, mais il consulte sa "bande" (Poincaré, Appell) et revient plein d'enthousiasme. Poincaré en particulier est très positif. Hermite met alors en œuvre une vraie campagne pour le soutien à Sophie (en particulier au moment

(26) Quand même, cette « facilité » a été accrue par le fait qu'elle était devenue veuve, obtenant ainsi plus ou moins le seul statut qui permettait à une femme d'être à la fois majeure et respectable. C'est aussi le statut qui ouvrira une chaire à la Sorbonne à Marie Curie, la deuxième femme au monde à obtenir une chaire de Professeur, dix-sept ans après que Sophie ait obtenu le poste « à vie ».

(27) Il ne le dit pas explicitement, mais c'est aussi grâce à ses propres qualités « politiques ».

(28) Nous sommes en 1923 !

(29) Le 31 décembre 1888, Hermite [21] écrit à Gösta en lui envoyant un projet de rapport :

> « [...] je me suis entretenu avec Madame Kowalevski afin de connaître le fond de votre sentiment sur le mérite de Poincaré, ne pensant pas pouvoir mieux m'adresser, et c'est en complète et absolue concordance de ce qu'elle m'a dit, avec ce que je pense moi-même depuis longtemps, que je me suis exprimé dans les termes dont je vous fais juge. Je crois devoir vous faire connaître que d'après Madame Kowalevski c'est l'opinion unanime des géomètres dont je me suis fait l'organe [...] »

> où on lui refuse l'admission à l'Académie de Stockholm) : il rassemble des lettres de sa bande[(30)] et aussi de ses demi-ennemis (type Bertrand), il écrit à Genocchi, alors président de l'Académie des Sciences de Turin, pour obtenir son soutien[(31)], *etc.* Il raconte aussi un dîner[(32)] en l'honneur de Sophie organisé par Bertrand, avec ministres, mathématiciens, *etc.* Au point que Sophie se demande si un poste en France *etc.* Hermite écrit à Mittag-Leffler pour la décourager (en fait, il parlera directement à Sophie qui "est extrêmement intelligente[(33)]" et comprend bien la situation : impossible de trouver un poste à Paris sauf peut-être à Sèvres, et encore *etc.* Il resterait la province, mais cela n'aurait rien de satisfaisant[(34)].
>
> Donc à Paris (et en Italie), elle est bien connue et appréciée, et tout à fait intégrée dans la communauté des mathématiciens. Hermite, qui n'est pas un progressiste de façon générale[(35)] souligne son talent, "exceptionnel pour une femme". Le principal problème vient de ce qu'à Berlin, c'est le moment où Kronecker et Weierstraß se brouillent violemment [...] Du coup, Kronecker est hostile à Sophie[(36)] et Fuchs apparemment, *dixit* Hermite, se tait autant que possible. »

Elle a contribué aux liens entre les écoles française et allemande de théorie des fonctions[(37)] ; elle a été éditrice d'*Acta Math.* (des numéros 5 à 14 inclus, c'est-à-dire jusqu'à sa mort) et en tant que telle a développé la publication d'articles de ses collègues russes et permis leur diffusion en Europe occidentale. Elle a ainsi joué un rôle important dans la transmission des idées mathématiques.

Sa réputation, avant-hier. Elle avait alors une excellente réputation scientifique. Il n'est pas contestable que sa réputation aujourd'hui ne correspond ni à ce qu'elle était à son époque, ni à la qualité de ce que l'on peut lire dans ses articles. Je pense m'être exprimée clairement sur son

(30) Lettre d'Hermite à Gösta du 19 mars 1886, dans [21] :

> « [...] il m'a paru que le meilleur moyen de défendre Madame Kowalevski, contre les attaques déplorables dont elle est l'objet, était de réunir en faisceau les opinions des géomètres français qui s'offrent comme garants de la supériorité de son talent et du mérite de ses écrits mathématiques.
>
> MM. Camille Jordan, Darboux, Appell, Poincaré, Picard, Tisserand, [...], m'ont autorisé à produire leur témoignage et à les joindre au mien. [...] »

(31) Il écrit en effet le même jour à Genocchi dans ce sens, voir [44].

(32) Lettre d'Hermite à Gösta le 12 janvier, voir [21], dans laquelle il fait état de ce dîner, d'un autre, d'un bal et d'un déjeuner, une riche vie sociale,

> « Mais je n'ignore plus les difficultés pénibles, les tristesses qui sont cachées sous ces apparences si brillantes. Madame Kowalevski m'a confié que sa fortune est médiocre, que son traitement de professeur à l'Université lui est nécessaire, que sans vous et Mr Glyden, qui êtes bons et excellents pour elle, sa qualité de Russe et d'étrangère, peut-être encore de femme savant, la laisserait entièrement isolée à Stockholm, où il lui faut rester pour vivre. »

(33) Lettre du 26 janvier 1889 [21].

(34) Lettre du 12 janvier 1889 [21],

> « Reste donc la province, mais la position serait peu enviable, et jamais je n'oserai conseiller à Madame Kowalevski de s'y risquer pour y être probablement moins bien encore qu'à Stockholm ; quelle étrange et douloureuse destinée pour une femme de génie ! »

Dans la lettre du 26 janvier où il rapporte ce qu'il a dit à Sophie, il évoque aussi les difficultés qu'a eues Stieltjes, en tant qu'étranger, à Toulouse.

(35) Ses commentaires sur le contexte politique dans les lettres dont j'ai cité des extraits ne laissent pas le moindre doute à ce sujet.

(36) Signalons quand même le chaleureux hommage rendu par Kronecker à Sophie après sa mort dans [41]. Note de l'Auteur.

(37) Rappelons que nous sommes entre les guerres de 1870 et de 1914.

travail sur le solide. Je ne suis pas spécialiste du théorème de Cauchy-Kowalevskaya, je renvoie donc à un texte de Cooke sur l'histoire de ce théorème [15] (plus récent et plus détaillé que l'évaluation parue dans son livre [16]). Comme Weil l'a dit à Ann Hibner Koblitz (elle le cite dans [31]), c'était une « mathématicienne à deux idées » alors que la plupart de ses collègues se contentent d'exploiter une idée (sans parler de ceux qui n'en ont eu aucune) aussi je me contente de mentionner ces deux travaux(38).

Sa réputation, hier... et aujourd'hui ? L'article [29] étudie, de façon assez intéressante, la façon dont l'image de Sophie s'est (a été) modifiée depuis sa mort, notamment sous l'influence de [11], que j'ai sans doute déjà assez cité comme ça(39). Le livre [28] de Klein aurait sa responsabilité lui aussi, probablement plus par maladresse que par volonté délibérée de son auteur. Il n'est pas indispensable de reproduire ici ce que l'on peut lire dans [29].

Sophie ou l'oubli. Il serait intéressant de faire une étude plus précise de la façon dont Sophie a disparu au XX^e^ siècle,

– par exemple, comment elle est d'abord l'élève la plus douée(40), l'élève préférée, de Weierstraß avant de n'être plus mentionnée du tout (voir [51]),

– ou encore comment elle est une éditrice active, favorisant le renom international du jeune journal *Acta Mathematica* et comment son nom n'apparaît pas, absolument pas, dans le numéro du centenaire(41) — sauf comme une lubie d'un Mittag-Leffler presque sénile dans l'article [56].

– Et ce n'est pas fini. Elle disparaît à nouveau, comme si elle avait été un péché de jeunesse, dont il est de mauvais goût de parler une fois installé, en voici un nouvel exemple, les titres des travaux d'Adler et van Moerbeke : en 1982, ils découvrent la notion d'intégrabilité algébrique (et le fait que c'est exactement la notion utilisée par Kowalevskaya, comme je l'ai signalé dans la note 18), l'article [2] s'intitule *Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization* ; en 1989, ils publient [3], *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis* ; en 2004, le livre [4], qui fait le bilan, la somme, de la théorie et de leurs travaux, s'intitule *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras.*

Références

[1] « Séance publique annuelle » – *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* **107** (1888), p. 1031.

[2] M. Adler & P. van Moerbeke – « Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization », *Comm. Math. Phys.* **83** (1982), no. 1, p. 83–106.

(38)Sophie a écrit peu d'articles, sa vie d'avant Stockholm a été agitée et difficile (comprenant quelques années moins productives) et elle est morte à l'apogée de sa carrière. L'un de ses articles, [37] s'est rapidement révélé faux, une chose assez courante, qui n'enlève rien à la qualité du reste.

(39)Dans la grande tradition illustrée en ces débuts par le bien nommé *Men of mathematics* de Bell [11], dont le chapitre *Master and pupil/Weierstrass, Sonja Kowalevski*, fait l'objet du commentaire de Cooke que j'ai cité dans la note 5, on peut citer le livre récent [40], un recueil d'aphorismes et d'anecdotes plus ou moins intéressantes, dans lequel notre Sophie apparaît sur une photographie, méconnaissable, déguisée en chat, il y a même un texte, ça se passait chez les Mittag-Leffler lors d'une fête d'Halloween (Halloween, en Suède au XIX^e^ siècle ?), parce que notre « lovely », je jure que je n'invente pas, Sophie, elle vivait chez les Mittag-Leffler et

> « she was *not* his wife »,

en italiques dans le texte.

(40)Je pense qu'il n'y a pas de relation d'ordre total sur l'ensemble des mathématiciens, ni même sur ce petit sous-ensemble que constituent les élèves de Weierstraß, mon objet n'est pas de discuter si Sophie était plus douée que ou préférée à Schwarz, mais de comprendre comment elle n'est plus là du tout.

(41)Voir la correspondance d'Ann Hibner Koblitz et de la rédaction d'*Acta Mathematica*, en les respectables personnes de Gårding et Hörmander, dans [31].

[3] ______, « The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 1, p. 3–51.

[4] M. Adler, P. van Moerbeke & P. Vanhaecke – *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5] G. G. Appelrot – « Gyroscopes pas complètement symétriques (en russe) », in *Mouvement d'un solide avec un point fixe (en russe)*, Académie des Sciences de l'URSS, 1940.

[6] M. Audin – « Courbes algébriques et sytèmes intégrables : géodésiques des quadriques », *Expositiones Math.* **12** (1994), p. 193–226.

[7] ______, *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.

[8] ______, « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001, Astérisque* **282** (2002), p. 113–135.

[9] ______, « Le cas de Sophie K. (de Jean-François Peyret) », *Gazette des Mathématiciens* (janvier 2005), http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/cas-sophie-k.pdf.

[10] M. Audin & R. Silhol – « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153–229.

[11] E. T. Bell – *Men of mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York, 1937.

[12] A. I. Bobenko, A. G. Reiman & M. A. Semenov-Tian-Shansky – « The Kowalevski top 99 years later », *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), p. 321–354.

[13] R. Bölling – « . . . Deine Sonia : a reading from a burned letter », *Math. Intelligencer* **14** (1992), no. 3, p. 24–30, Translated from the German by David E. Rowe.

[14] R. Cooke – « Sofia Kovaleskaia's place in nineteenth century mathematics », *in* [26].

[15] ______, « The Cauchy-Kovaleskaya theorem », *preprint*, http://www.cems.uvm.edu/~cooke/ckthm.pdf.

[16] ______, *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer, 1984.

[17] ______, « Kovalevskaya's mathematical work », in *The Kowalevski property (Leeds, 2000)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 21–40.

[18] ______, « The life of S. V. Kovalevskaya », in *The Kowalevski property (Leeds, 2000)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 1–19.

[19] J. Détraz – *Kovalevskaïa : l'aventure d'une mathématicienne*, Belin, Paris, 1993.

[20] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev & S. P. Novikov – « Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-band linear operators and Abelian varieties », *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), no. 1(187), p. 55–136.

[21] P. Dugac – « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884-1891) », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **6** (1985), p. 79–216, Transcription et annotations par Pierre Dugac.

[22] V. V. Golubev – *Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point*, Translated from the Russian (1953) by J. Shorr-Kon, Published for the National Science Foundation by the Israel Program for Scientific Translations, 1960.

[23] P. A. Griffiths – « Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations », *Amer. J. of Math.* **107** (1985), p. 1445–1483.

[24] L. Hörmander – « The first woman professor and her male colleague », in *Miscellanea mathematica*, Springer, Berlin, 1991, p. 195–211.

[25] I. James – *Remarkable mathematicians*, Cambridge University Press, 2002.

[26] L. Keen (éd.) – *The legacy of Sonya Kovalevskaya*, Contemporary Math., vol. 64, Amer. Math. Soc., 1987, Proceedings of a Symposium sponsored by the Association for women in mathematics and the Mary Ingraham Bunting Institute.

[27] A. A. Kirillov – *Éléments de la théorie des représentations*, MIR, Moscou, 1974.

[28] F. Klein – *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Two volumes reprinted as one, With a foreword by R. Courant and O. Neugebauer.

[29] A. H. KOBLITZ – « Changing views of Sofia Kovalevskaia », *in* [26].

[30] ———, « Sofia Kovaleskaia (sic), A biographical sketch », *in* [26].

[31] ———, « Sofia Kovalevskaia and the mathematical community », *The Mathematical Intelligencer* **6** (1984), p. 20–29.

[32] ———, *A convergence of lives*, second éd., Lives of Women in Science, Rutgers University Press, New Brunswick, NJ, 1993, Sofia Kovalevskaia [S. V. Kovalevskaya] : scientist, writer, revolutionary.

[33] B. KOSTANT – « Quantization and representation theory I : prequantization », in *Lectures in modern analysis and applications III*, Lecture Notes in Math., vol. 170, Springer, 1970.

[34] S. KOVALEVSKAÏA – *Une nihiliste*, Phébus, Paris, 2004.

[35] S. KOVALEVSKAYA – *A Russian childhood*, Springer, 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.

[36] S. KOWALEVSKI – « Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3^{tem} Ranges auf ellipstische Integrale », *Acta Math.* **4** (1884), p. 392–414.

[37] ———, « Über die Brechnung der Lichtes in cristallinischen Mitteln », *Acta Math.* **6** (1885), p. 249–304.

[38] ———, « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.

[39] ———, « Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **14** (1890-91), p. 81–93.

[40] S. G. KRANTZ – *Mathematical apocrypha*, MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002, Stories and anecdotes of mathematicians and the mathematical.

[41] L. KRONECKER – « Sophie von Kowalevsky », *Journal de Crelle* **108** (1891), p. 88.

[42] A. MACIEJEWSKI & M. PRZYBYLSKA – « Differential Galois approach to the Non-Integrability of the Heavy Top Problem », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **14** (2005), p. 123–160.

[43] D. MARKUSHEVICH – « Kowalevski top and genus-2 curves », *J. Phys. A* **34** (2001), no. 11, p. 2125–2135, Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (Leeds, 2000).

[44] G. MICHELACCI – « Le lettere di Charles Hermite a Angelo Genocchi (1868-1887) », *Quaderni Matemtici, Università degli Studi di Trieste* **546** (2003), Trascrizione introduzione commenti note ed indici a cura di Giacomo Michelacci.

[45] G. MITTAG-LEFFLER – « Sophie Kovalevsky », *Acta Math.* **16** (1892-93), p. 385–392.

[46] ———, « Weierstrass et Sonja Kowalewsky », *Acta Math.* **39** (1923), p. 133–198.

[47] J. MORALES-RUIZ – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.

[48] ———, « Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory », *Regular and chaotic dynamics* **5** (2000), p. 251–272.

[49] P. PAINLEVÉ – « Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme », *Acta Math.* **25** (1902), p. 1–85.

[50] P. Y. POLUBARINOVA-KOCHINA – « On the scientific work of Sofya Kovalevskaya », in [35], 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.

[51] R. REMMERT – *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.

[52] A. G. REYMAN & M. A. SEMENOV-TIAN-SHANSKI – « Group theoretical methods in the theory of finite dimensional Integrable systems », *Dynamical systems VII, Encyclopaedia of Math. Sci., Springer* **16** (1994).

[53] P. RICHTER, H. DULLIN & A. WITTEK – *Kowalewskaja Kreisel*, IWF, Göttingen, 1997, DVD, http://www.iwf.de.

[54] J.-L. VERDIER – « Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques [d'après M. Adler et P. van Moerbeke] », in *Séminaire Bourbaki, 1980-81*, Springer, Berlin, 1981, p. 85–94.

[55] K. WEIERSTRASS – « Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid », *Math. Werke I*, p. 257–266.

[56] A. WEIL – « Mittag-Leffler as I remember him », *Acta Math.* **148** (1982), p. 9–13.

[57] J.-C. Yoccoz – « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré », *Gazette des mathématiciens* **107** (2006), p. 19–26.

[58] V. E. Zakharov (éd.) – *What is integrability ?*, Springer, Berlin, 1991.

[59] S. L. Ziglin – « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), p. 6–17.

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex • *E-mail :* `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`
Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`