Michèle Audin

UN COURS SUR
LES FONCTIONS SPÉCIALES

Michèle Audin
E-mail : Michele.Audin@math.unistra.fr
Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

Version préliminaire du 26 novembre 2012

UN COURS SUR LES FONCTIONS SPÉCIALES

Michèle Audin

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction, sources et sommaire ... 7
Ce qu'il est impossible de ne pas savoir si l'on veut suivre ce cours : convergence d'une suite de fonctions ... 7
Ce qu'il est impossible de ne pas savoir si l'on veut suivre ce cours : fonctions définies par une intégrale ... 8
Ce qu'il faudrait savoir avant de suivre ce cours : les grands théorèmes sur les fonctions d'une variable complexe ... 9
Mise en place d'autres outils ... 11
Les fonctions « spéciales » étudiées ... 11
Quelques théorèmes obtenus ... 13
Exercices de « révision » ... 14
Autour de $\zeta(2n)$ ... 16

II. Notes sur la fonction Γ ... 19
II.1. La fonction Γ comme fonction de variable réelle ... 19
II.2. La fonction Γ comme fonction de variable complexe ... 23
Exercices sur la fonction Γ ... 27

III. Notes sur les fonctions elliptiques ... 31
III.1. Réseaux dans $\mathbf{C}$ ... 31
III.2. La fonction $\wp$ de Weierstrass ... 32
III.3. Corps des fonctions elliptiques ... 35
III.4. Changer de réseau ... 35
III.5. Opération du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré ... 36
III.6. Réseaux et fonctions elliptiques, le retour ... 38
III.7. Intégrales elliptiques ... 41
Exercices sur les fonctions elliptiques ... 42
Exercices sur le demi-plan de Poincaré, le groupe modulaire ... 47

IV. Appendice, les produits infinis ... 49
IV.1. Produits infinis de nombre complexes ... 49
IV.2. Produits infinis de fonctions ... 51
IV.3. Exemple, développement de la fonction sinus ... 52
Exercices ... 52

V. Notes sur les séries de Dirichlet ... 53
V.1. Demi-plans de convergence ... 53
V.2. Développement asymptotique ... 56
V.3. Séries de Dirichlet à coefficients périodiques ... 57
V.4. La fonction ζ de Riemann ... 58
V.5. Le théorème des nombres premiers ... 64
Exercices sur les séries de Dirichlet ... 69

VI. Appendice : caractères des groupes abéliens finis, exercices d'arithmétique 73
VI.1. Définition des caractères 73
VI.2. Propriétés utiles 73
Exercices d'arithmétique 74

Bibliographie 77

CHAPITRE I

INTRODUCTION, SOURCES ET SOMMAIRE

Le cours se veut un cours complémentaire au cours d'analyse complexe de première année de magistère, développant quelques applications, à des questions de théorie des nombres notamment.

Pour préparer le cours, j'ai utilisé

– Le polycopié [**1**],
– l'indispensable et inusable petit livre [**13**] de Jean-Pierre Serre,
– le cours de Jean-Benoît Bost à l'École polytechnique [**2**] (qui était aussi une des sources de [**1**])
– les exercices de Claude Sabbah pour ce même cours,
– le merveilleux livre de Whittaker et Watson [**14**],
– (implicitement, les sources de [**1**], en particulier le livre [**3**] d'Henri Cartan et [**8**] pour le théorème des nombres premiers).

De façon plus détaillée :

– les produits infinis et la fonction Γ viennent assez directement de [**2**],
– le chapitre sur les séries de Dirichlet est inspiré de [**2**] et de [**13**] (avec [**8**] pour la démonstration du théorème des nombres premiers),
– les fonctions elliptiques viennent de [**3**] et de [**14**],
– le chapitre sur le groupe modulaire vient de [**13**],
– deux démonstrations(1) et quelques exercices viennent de [**6**].

Je recommande en outre très fortement aux étudiants (les autres n'ont pas besoin de ma recommandation) le livre de Pierre Colmez [**4**], un bel ouvrage très culturel qui va bien au-delà du sujet étroit de ces notes.

Pour les concepts de base sur la théorie de l'intégration, je renvoie au livre [**5**]. Enfin, cet ensemble de notes n'est pas disjoint de celui constitué par les notes d'analyse complexe [**1**].

Ceci n'est pas un livre, à peine un polycopié, mais une simple compilation de notes de cours. Si vous le lisez, traitez le comme tel et signalez-moi avec gentillesse ses fautes et ses imperfections.

Ce qu'il est impossible de ne pas savoir si l'on veut suivre ce cours : convergence d'une suite de fonctions

Soient X et Y deux ensembles, et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications

$$f_n : X \longrightarrow Y.$$

Convergence simple. On suppose que X est un ensemble et Y un espace topologique. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* vers $f : X \to Y$ si, pour tout élément x de X la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de Y a pour limite $f(x) \in Y$.

(1) Celle du théorème de Wielandt II.2.9 et celle de la jolie forme de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta V.4.3.

Convergence uniforme. On suppose maintenant que Y est un espace métrique. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément* vers $f : X \to Y$ si

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in X} d_Y(f(x), f_n(x))\right) = 0$$

ou encore, de façon équivalente, si

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N \in \mathbf{N} \quad \forall\,x \in X \quad \forall\,n \geq N \quad d_Y(f(x), fn(x)) < \varepsilon.$$

Concrètement, dans ces notes, l'ensemble Y sera le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, muni de sa topologie (métrique) habituelle. Les suites considérées seront le plus souvent des séries.

Convergence normale d'une série de fonctions. Pour une partie $U \in \mathbf{C}$, et pour une fonction $f : U \to \mathbf{C}$, on note

$$\|f\|_U = \sup_{z\in U} |f(z)|\,.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbf{C}$. On dite que *la série* $\sum f_n$ *converge normalement* sur A si tout point de A possède un voisinage U sur lequel $\sum \|f_n\|_U < +\infty$.

Pour une série de fonctions définies sur $A \subset \mathbf{C}$, la convergence normale sur A implique la convergence uniforme au voisinage de chaque point de A. En particulier, la somme d'une série normalement convergente de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe.

Ce qu'il est impossible de ne pas savoir si l'on veut suivre ce cours : fonctions définies par une intégrale

Pour la régularité des fonctions définies par une intégrale, nous renvoyons à l'excellent chapitre VII de l'excellent livre [**5**]. Le théorème de convergence dominée [**5**, théorème I.3.4] de Lebesgue donne immédiatement les trois résultats suivants. Dans ces trois énoncés, la variable t vit dans un espace T mesuré dont la mesure est appelée μ (pour nous, ce sera toujours un ouvert de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ muni de la mesure de Lebesgue) et la variable x (« paramètre ») dans un espace U qui est un intervalle de $\mathbf{R}$ ou un ouvert de $\mathbf{C}$. Il est question d'une fonction

$$f : U \times T \longrightarrow \mathbf{C}.$$

On suppose que, pour chaque valeur x du paramètre, la fonction

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est intégrable. Les trois théorèmes affirment alors, que sous une hypothèse facile à vérifier[(2)] (mais indispensable !), la régularité de la fonction

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

se transmet à la fonction définie par une intégrale

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_T f(x,t)\,d\mu(t). \end{aligned}$$

***Théorème* (Continuité).** *On suppose que*

(1) *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est continue sur U,

[(2)] Ici apparaît la grande force du théorème de convergence dominée.

(2) *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_K telle que*

$$\forall\, t \in T \quad \forall\, x \in K \quad |f(x,t)| \leq g_K(t).$$

Alors la fonction F est continue sur U.

***Théorème* (Dérivabilité)**. *On suppose que*

(1) *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est dérivable sur U,

(2) *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_K telle que, si $t \in T$ est tel que $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable, on a*

$$\forall\, x \in K \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_K(t).$$

Alors la fonction F est dérivable sur U et sa dérivée est

$$F'(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, d\mu(t).$$

***Théorème* (Analyticité)**. *On suppose que U est un ouvert de $\mathbf{C}$ et que*

(1) *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est analytique sur U,

(2) *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_K telle que*

$$\forall\, t \in T \quad \forall\, x \in K \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_K(t).$$

Alors la fonction F est analytique sur U et on a, pour tout entier n,

$$F^{(n)}(x) = \int_T \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\, d\mu(t).$$

La condition que U soit un ouvert de $\mathbf{C}$ est indispensable dans ce dernier énoncé (voir l'exercice I.3).

Ce qu'il faudrait savoir avant de suivre ce cours : les grands théorèmes sur les fonctions d'une variable complexe

Les fonctions entières et le théorème de Liouville[3]. Ce théorème, sans analogue en analyse réelle, est une application du théorème de Cauchy. Voir le § II.3 de [**1**].

Théorème. *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Il y a de continuelles applications de ce théorème dans ce cours, *via* des arguments comme

– la fonction f est entière, périodique par rapport à un réseau, donc bornée, donc elle est constante,

– les fonctions f et g sont méromorphes sur $\mathbf{C}$ avec les mêmes pôles simples et les mêmes résidus en ces pôles ; pour une raison ou pour une autre, on sait que la différence est bornée, donc cette différence est entière, bornée, les deux fonctions diffèrent par une constante (très souvent utilisé pour montrer que deux fonctions sont égales),

– etc.

[3] Joseph Liouville (1809–1882), auteur de nombreux théorèmes et, pour ce qui concerne la culture scientifique des lecteurs de ce cours, inventeur des tout premiers nombres transcendants, par exemple celui-ci

$$1,110001000000000000000000010 \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Une application remarquable est le fait que, du point de vue de l'analyse complexe, un disque ouvert et le plan complexe sont des objets très différents (alors qu'ils sont homéomorphes, c'est-à-dire indistingables du point de vue de la seule topologie[(4)]) : il n'existe pas d'isomorphisme analytique (c'est-à-dire d'application analytique bijective dont l'inverse est aussi analytique) du disque unité ouvert sur $\mathbf{C}$. En effet, s'il en existait une, son inverse serait une fonction entière (définie sur $\mathbf{C}$) et bornée (à valeurs dans le disque), donc constante, donc pas bijective.

Donc : dire d'une fonction qu'elle est « entière », c'est en affirmer une propriété *globale*, alors que dire qu'elle est « holomorphe » (sous entendu « sur un ouvert », « quelque part »), c'est en affirmer une propriété *locale*.

Parmi les fonctions rencontrées dans ce cours, beaucoup sont définies sur des demi-plans. De façon parfois surprenante pour les débutants, un demi-plan ouvert n'est pas isomorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, la preuve : il est isomorphe à un disque ouvert. Par exemple, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H} &\longrightarrow D \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

est un isomorphisme analytique du « demi-plan de Poincaré »

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

sur le disque unité ouvert, d'inverse

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D &\longrightarrow \mathcal{H} \\ w &\longmapsto i\frac{1+w}{1-w}. \end{aligned}$$

Le principe du maximum. Le théorème de Liouville peut aussi être considéré comme un avatar du principe du (module) maximum. Voir ici aussi le § II.3 de [**1**].

***Théorème* (Principe du module maximum)**. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

Ce que ça veut dire ? Dessinons le graphe de la fonction $z \mapsto |f(z)|$, de U dans $\mathbf{R}$. C'est ce qu'on appelle le « paysage analytique » de f. Promenons-nous dans ce paysage : tous les sommets sont à l'horizon.

Une application classique de ce théorème est le « lemme de Schwarz[(5)] », qui permet de décrire tous les automorphismes du disque (et par voie de conséquence ceux du demi-plan de Poincaré). Voir les exercices I.5 et I.6.

Le théorème de l'application ouverte.

Théorème. *Toute fonction holomorphe non constante est une application ouverte.*

Il y en a deux démonstrations dans le § II.3 de [**1**].

Le théorème des résidus. Voir le § V.I de [**1**].

Théorème. *Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, F un ensemble fini de points de U, f une fonction holomorphe sur $U - F$ et γ un lacet à valeurs dans $U - F$. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in F} \operatorname{rés}(f, z_0) \operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$$

Il a de nombreuses applications et on l'utilise constamment :

(4) Voir l'exercice I.4.

(5) Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), qui avait été un étudiant de Weierstrass et qui est bien connu des étudiants français actuels pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz et pour le théorème qui dit que la dérivée seconde d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est une forme bilinéaire symétrique, est aussi l'auteur de ce résultat très utile d'analyse complexe et d'un principe de symétrie (rencontré dans [**1**]).

– pour calculer des intégrales, même réelles ; même si ce n'est pas inattendu, certains de ces calculs sont assez futés, voir l'exercice I.8,

– en application du fait que les pôles de f'/f sont les zéros et les pôles de f, pour compter ces zéros ici ou là.

C'est un bon endroit pour rappeler ce « truc » très simple et très utile. Si sur un voisinage de a, la fonction f s'écrit

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \text{ avec } m \in \mathbf{Z} \text{ et } g \text{ holomorphe non nulle en } a$$

(autrement dit, si $m \geq 1$, f a un zéro d'ordre exactement m en a, si $m \leq -1$, elle y a un pôle d'ordre exactement $-m$, ou encore, m est la valuation de f en a). Alors, sur ce même voisinage, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \text{ ... avec } \frac{g'}{g} \text{ holomorphe au voisinage de } a,$$

autrement dit, f'/f a un pôle simple en tout zéro ou pôle de f, et son résidu en ce pôle est la valuation m de f en ce point. Pour des applications, voir par exemple les exercices sur les fonctions elliptiques ci-dessous (au § III.7).

Mise en place d'autres outils

Outre ces quatre grands théorèmes, appartenant aux acquis du cours d'analyse complexe, on explicite et met en place différents techniques et outils.

Les produits infinis. Le cours contient une version, disons, « détaillée », du § 6.3 de [**1**], que l'on trouve ici dans l'appendice IV. Voir par exemple l'exercice IV.1.

Les séries de fonctions méromorphes. Si (f_n) est une suite des fonctions méromorphes sur U et si K est une partie de U, on dira que la série $\sum f_n$ *converge uniformément* (resp. *normalement*) sur K si

– l'ensemble des entiers n tels que f_n a un pôle dans K est fini et

– les autres f_n forment une série uniformément (resp. normalement) convergente sur K.

On démontre alors facilement que, si (f_n) est une série de fonctions méromorphes qui converge normalement sur les compacts de U, la somme est méromorphe sur U et qu'on peut calculer la dérivée de la somme comme somme des dérivées des f_n.

C'est ce qui permet de définir la fonction $\wp$ de Weierstrass et d'autres fonctions elliptiques et de calculer leurs dérivées. Voir aussi, par exemple, l'exercice I.9.

Les caractères des groupes finis. Il s'agit simplement des homomorphismes d'un groupe G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\star$. Ici seulement dans le cas où G est abélien fini et principalement dans le cas où G est le groupe $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\star$ des unités de l'anneau $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Voir l'exercice VI.1 et le livre [**13**] dont il est issu.

L'opération du groupe modulaire sur $\mathcal{H}$. On étudie l'opération de $\Gamma = PSL(2;\mathbf{Z})$ sur le demiplan de Poincaré $\mathcal{H}$. On montre que la partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$ définie par

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \text{Ré}(z) < \frac{1}{2} \text{ et } (|z| > 1 \text{ ou } z = e^{i\theta} \text{ avec } 1 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}) \right\}$$

est un domaine fondamental pour cette opération. On en déduit par exemple que $PSL(2;\mathbf{Z})$ est engendré par la translation $T(z) = z+1$ et la transformation S définie par $S(z) = -1/z$. Voir le § III.5 et aussi [**13**].

Les fonctions « spéciales » étudiées

Il va sans dire que le mot « fonction spéciale » n'a pas de définition absolue. Un cours de fonctions spéciales est un cours sur les fonctions dont l'enseignant a envie de parler. Voici mon choix.

La fonction Γ. Voir le chapitre II. Une fonction qui vaut $n!$ sur les entiers et plus précisément telle que $\Gamma(n+1) = n!$, qui satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Définie, pour $z \in]0, +\infty[$, puis pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$, par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Quelques formules :

– Celle de Gauss

$$\text{pour } \mathrm{Ré}(z) > 0, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z},$$

– celle de Weierstrass

$$\text{pour } \mathrm{Ré}(z) > 0, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

(où γ est la constante d'Euler), et, une fois la fonction prolongée (théorème ci-dessous),

– celle de Legendre-Gauss

$$\text{pour } z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N}) \text{ et } p \in \mathbf{N}, p \geq 1, \quad \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{p}\right) = (2\pi)^{(p-1)/2} p^{1/2-z} \Gamma(z),$$

– celle « des compléments »

$$\text{pour } z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Le prolongement à $\mathbf{C}$. Attention, l'intégrale ne converge que pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$ mais la fonction qu'elle définit se prolonge :

Théorème. *La fonction Γ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier. Elle est holomorphe sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle a, en $-n$, un pôle simple de résidu $(-1)^n/n!$. Elle ne s'annule pas, et la fonction entière $1/\Gamma$ est donnée par les formules de Gauss et de Weierstrass.*

Elle satisfait aux équations fonctionnelles

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ et } \Gamma(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z+k)^{-1} \Gamma(z+n).$$

Les séries de Dirichlet... Les séries de la forme[(6)]

$$D(z) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}$$

dont les ensemble de convergence sont des demi-plans $\mathrm{Ré}(z) > \sigma$ et dont les sommes partielles constituent un développement asymptotique pour $\mathrm{Ré}(z) \to +\infty$.

... parmi lesquelles la fonction zêta de Riemann. Elle est définie par[(7)]

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$$

[(6)] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) est, entre autres choses, l'auteur du théorème de la progression arithmétique, un résultat d'arithmétique dont la démonstration met en jeu de l'algèbre (caractères des groupes finis) et de l'analyse complexe (séries de Dirichlet). Outre ses travaux remarquables, il a laissé son nom au « principe des tiroirs » que l'on énonce en général ainsi : si on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a forcément un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. Il a vécu dans un milieu incroyablement musical : sa femme, Rebecca, était la sœur des compositeurs Fanny et Felix Mendelssohn et, à Göttingen, venaient chez eux, et y faisaient de la musique des gens comme Clara Schumann et Johannes Brahms (on ne sait pas où les invités rangeaient leurs chaussettes).

[(7)] Bernhard Riemann (1826–1866), auteur de nombreuses contributions aux mathématiques et en particulier à la géométrie différentielle et à l'analyse. Il a laissé son nom à « la sphère de Riemann », qui est le plan complexe complété d'un point à l'infini et le premier exemple de « surface de Riemann » (et en même temps un exemple de variété), et, bien sûr, à « la fonction zêta de Riemann » et à « l'hypothèse de Riemann » dont il est question dans ces notes. Il est mort avant quarante ans, de la tuberculose.

et converge normalement pour Ré$(z) > 1$. On l'écrit aussi comme un produit infini

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

(sur tous les nombres premiers). Elle se prolonge à $\mathbf{C}$ tout entier, et plus précisément :

Théorème. *La fonction*

$$\varphi(z) = \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

se prolonge en une fonction entière.

Prolonger au demi-plan Ré$(z) > 0$ est assez facile. Pour $\mathbf{C}$ tout entier, outre celle du cours, il y a une démonstration dans l'exercice V.5.

Les fonctions elliptiques. Pour un réseau $\Lambda \subset \mathbf{C}$,

Théorème. *La série de fonctions méromorphes*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C} - \Lambda$ et définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ notée $\wp(z)$.

Elle est paire et bi-périodique (c'est-à-dire périodique par rapport à Λ). Ses pôles sont les points du réseau Λ. En plus, $\wp$ vérifie la relation

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

où g_2 et g_3 sont des constantes définies par le réseau Λ.

Pour la suite, il est important de remarquer que le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ a toutes ses racines simples (voir l'exercice III.6). Les constantes g_2 et g_3 sont

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^4} \text{ et } g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Quelques théorèmes obtenus

Le théorème de la progression arithmétique. On donne deux entiers a et m premiers entre eux (cette condition est évidemment nécessaire), le théorème affirme qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $a + km$. C'est un énoncé purement arithmétique.

***Remarque* (qui a l'air stupide mais qui n'est peut-être pas inutile)**. On ne se pose pas cette question si on ne sait pas déjà qu'il y a une infinité de nombres premiers... ce qui est bien facile et à la portée de tous (on suppose qu'il y en a un nombre fini, soit N le plus grand d'entre eux, de sorte que la liste des nombres premiers est $2, 3, \ldots, N$, on fabrique le nombre $(2 \times 3 \times \cdots \times N) + 1$, qui n'est divisible par aucun des nombres précédents et a donc un facteur premier $> N$, une contradiction).

Le théorème de la progression arithmétique est plus précis que la simple infinitude des nombres premiers. Pour un ensembe $A \subset \mathcal{P}$ de nombres premiers, on définit sa densité

$$k(A) = \lim_{s \to 1} \frac{\displaystyle\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}}{\ln \dfrac{1}{s-1}}$$

(qui vaut 1 si $A = \mathcal{P}$ et qui est nulle si A est fini). L'énoncé suivant est alors une version « quantifiée » du théorème de Dirichlet. Il fait intervenir la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(m) = \#(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\star$.

Théorème. *Soient a et m deux entiers premiers entre eux, $m \geq 1$. Soit*

$$\mathcal{P}_a = \{p \in \mathcal{P} \mid p \equiv a \mod m\}.$$

Alors $k(\mathcal{P}_a) = 1/\varphi(m)$.

On utilise dans la démonstration, de façon essentielle, le fait que, si χ est un caractère modulo m non trivial, alors $L(z,\chi)$ est holomorphe en 1... où $L(z,\chi)$ est la série de Dirichlet

$$L(z,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n) n^{-z}.$$

Le théorème des nombres premiers. Celui-ci repose sur les propriétés de la fonction zêta, et notamment sur le fait que cette fonction ne s'annule pas sur la droite $\text{Ré}(z) = 1$. Il dit quelque chose, asymptotiquement, sur le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné. Précisément :

Théorème. *Pour $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On a*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \textit{ quand } x \to +\infty.$$

Une démonstration se trouve dans [**1**].

L'invariant modulaire j. C'est la fonction qui, à un réseau Λ, associe le nombre complexe

$$j(\Lambda) = \frac{g_2(\Lambda)^3}{g_2(\Lambda)^3 - 27 g_3(\Lambda)^2}.$$

On montre qu'elle est surjective et l'on en déduit une sorte de réciproque au théorème sur la fonction $\wp$.

Théorème. *Soient g_2, $g_3 \in \mathbf{C}$, tels que $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$. Il existe un réseau Λ tel que $g_2(\Lambda) = g_2$ et $g_3(\Lambda) = g_3$.*

Exercices de « révision »

Exercice I.1. Dans cet exercice, Y est un espace topologique et X un ensemble. Montrer que la topologie définie sur l'ensemble des applications de X dans Y par la convergence simple est la topologie produit sur Y^X.

Exercice I.2. Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est dense dans l'espace $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$ de toutes les applications.

Exercice I.3. Montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-|x|}.$$

Le théorème d'analyticité d'une fonction définie par une intégrale s'applique-t-il lorsque U est un ouvert de $\mathbf{R}$?

Exercice I.4. Vérifier que l'application

$$u \longmapsto u/\sqrt{1-|u|^2}$$

est un homéomorphisme (c'est-à-dire une application continue bijective dont l'inverse est aussi continue) du disque unité ouvert sur $\mathbf{C}$.

***Exercice I.5* (Le lemme de Schwarz)**. On appelle D le disque unité ouvert. Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| < 1$ pour tout z dans D (f envoie D dans lui-même et fixe 0).

Montrer que $z \mapsto f(z)/z$ définit une fonction holomorphe sur D. Soit $r \in]0,1[$. Montrer que

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \text{ pour } |z| \leq r.$$

En déduire que
$$|f(z)| \leq |z| \text{ pour tout } z \text{ dans } D.$$

Supposons maintenant qu'il existe un z_0 non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

***Exercice I.6* (Automorphismes du disque unité)**. On utilise les notations (et le résultat) de l'exercice I.5. On appelle *automorphisme* de D un automorphisme analytique, c'est-à-dire une bijection holomorphe dont l'application réciproque est holomorphe. Le but de cet exercice est de déterminer tous les automorphismes du disque D.

(1) Déterminer les automorphismes de D qui fixent 0.

(2) Soit $f : D \to D$ un automorphisme et soit $\alpha = f(0)$. Montrer que v_α, définie par
$$v_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$
est un automorphisme de D et que son inverse est $v_{-\alpha}$. En déduire que
$$f(z) = v_{-\alpha}(\lambda z).$$
On a ainsi déterminé tous les automorphismes de D.

***Exercice I.7* (Automorphismes de $\mathcal{H}$)**. Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ est le groupe $\mathrm{PGL}(2; \mathbf{R})$.

(1) Montrer que le groupe $\mathrm{GL}(2; \mathbf{R})^+$ des matrices réelles de déterminant positif opère sur $\mathcal{H}$ par
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

(2) et que l'homomorphisme $\mathrm{GL}(2; \mathbf{R})^+ \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ défini par cette opération a pour noyau le sous-groupe des homothéties (matrices $\lambda \,\mathrm{Id}$).

(3) Il reste à démontrer que tous les automorphismes sont de cette forme. Soit $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un automorphisme. En utilisant l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{H} \to D$ défini par $\varphi(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ et son inverse, montrer qu'il existe λ de module 1 et α de module strictement inférieur à 1 tels que (avec les notations de l'exercice précédent)
$$F = \varphi^{-1} \circ v_{-\alpha}(\lambda \varphi(z)).$$

(4) Soit μ une racine carrée de λ. Montrer que $F(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, où
$$a = \mathrm{Ré}(\mu + \alpha\overline{\mu}), \quad b = \mathrm{Im}(\mu - \alpha\overline{\mu}), \quad c = -\mathrm{Im}(\mu + \alpha\overline{\mu}), \quad d = \mathrm{Ré}(\mu - \alpha\overline{\mu})$$
et conclure.

***Exercice I.8* (Calcul de l'intégrale gaussienne grâce au théorème des résidus[9])**

On pose $a = (1 + i)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $g(z) = \dfrac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$.

(1) Calculer a^2 et montrer que $g(z) - g(z + a) = e^{-z^2}$.

(2) Montrer que les pôles de g sont les $(2k + 1)a/2$ (pour $k \in \mathbf{Z}$) et calculer son résidu en $a/2$.

(3) Pour $r > 0$ dessiner le parallélogramme de sommets $-r, r, r + a, -r + a$. On appelle C_r ce parallélogramme parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale
$$\int_{C_r} g(z)\, dz.$$

(4) En admettant provisoirement que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0, déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

(5) Montrer que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0.

---

[9] Cette méthode de calcul de l'intégrale gaussienne est due à Helmuth Kneser (voir [**10**, p. 414].

Exercice I.9. Montrer que les formules suivantes définissent des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ et déterminer leurs pôles (et les ordres de ceux-ci)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{z^2+n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Exercice I.10. Montrer que la série de fonctions méromorphes

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformément sur les bandes $x_0 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq x_1$, puis sur les compacts de $\mathbf{C}$. Vérifier que la somme f de la série a les propriétés suivantes

(1) Elle est périodique de période 1 (c'est clair).

(2) Elle a un pôle en chaque entier n et s'écrit plus précisément

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + h(z)$$

où h est holomorphe au voisinage de n.

(3) Elle tend vers 0 uniformément en x quand $|y|$ tend vers l'infini (on a écrit $z = x + iy$), plus précisément, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, M, \quad |y| \geq M \Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon.$$

Montrer que la fonction $g(z) = (\pi/\sin \pi z)^2$ satisfait aux mêmes propriétés et conclure que ces deux fonctions sont égales.

Exercice I.11. Cet exercice utilise les résultats de l'exercice I.10. Montrer que la série de fonctions méromorphes

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$ vers une fonction méromorphe f. Calculer la dérivée de f et montrer que

$$f(z) = \frac{\pi}{\tan \pi z} \text{ et } \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Autour de $\zeta(2n)$

***Exercice I.12* (Nombres de Bernoulli)**. Montrer que l'égalité

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

définit bien une série formelle. Les *nombres de Bernoulli B_n* sont alors définis par cette égalité. Montrer que la suite des nombres de Bernoulli n'est pas bornée.

Montrer qu'ils satisfont à la relation

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et que ce sont des nombres rationnels. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. Montrer que $B_n = 0$ si n est impair ≥ 3.

Montrer l'égalité

$$\frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

et en déduire

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Exprimer les développements en série entière de $\tan z$ (on pourra démontrer et utiliser le fait que $\tan z = \cot z - 2\cot 2z$), $z/\sin z$ (et celui que $\cot z + \tan z/2 = 1/\sin z$) en termes des nombres de Bernoulli[10].

Exercice I.13. On a montré (exercice I.11) que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On développe ici en série de Laurent, sur le disque épointé de centre 0 et de rayon 1, la fonction

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} q_{2n} z^{2n-1}.$$

Vérifier que

$$q_{2n} = 2\zeta(2n) \left(= 2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2n}} \right).$$

En déduire la formule d'Euler

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

(les B_i sont les nombres de Bernoulli introduits dans l'exercice I.12) et, en utilisant les valeurs des B_{2i} obtenues dans ce même exercice I.12, en déduire que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (encore...), $\zeta(4) = \pi^4/90$ et $\zeta(6) = \pi^6/945$.

La fonction cotangente est solution de l'équation différentielle

$$y' = -1 - y^2$$

donc la série

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

est solution de

$$y' = -y^2 - \pi^2.$$

En déduire (toujours...) que $\zeta(2) = \pi^2/6$ et, pour $n \geq 2$, la formule « récursive »

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k)$$

qui permet de calculer, de proche en proche les $\zeta(2n)$ à partir de $\zeta(2)$.

Exercice I.14. Montrer que

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$$

En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

[10] Les nombres de Bernoulli interviennent dans la valeur de $\zeta(2k) = \sum n^{-2k}$, voir l'exercice I.13. Voir aussi l'exercice V.8.

CHAPITRE II

NOTES SUR LA FONCTION Γ

On construit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui interpole $n!$ sur les entiers, c'est-à-dire, plus précisément, qui est solution de l'« équation fonctionnelle »

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

La première remarque est que cette relation ne définit certainement pas une unique fonction : si f est n'importe quelle fonction telle que $f(z+1) = f(z)$ (et il y en a !), alors $F(z) = \Gamma(z)f(z)$ est une autre solution. Fixer $\Gamma(1) = 1$ par exemple, ne suffit pas non plus (il suffit de choisir $f(1) = 1$). Voir toutefois le théorème II.2.9 ci-dessous.

La notation Γ est due à Legendre[(1)].

Ici nous procédons par étapes, construisant d'abord Γ sur $]0, +\infty[\subset \mathbf{R}$ puis sur le demi-plan $\text{Ré}(z) > 0$, puis au-delà.

II.1. La fonction Γ comme fonction de variable réelle

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Il ne suffit pas de poser pour que ça ait un sens. Ici la convergence de l'intégrale est assurée

– pour $t \to +\infty$, par la présence de l'exponentielle,
– pour $t \to 0$, par le fait que l'exposant $x - 1$ de t est > -1.

Théorème II.1.1. *La fonction Γ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1}\, dt.$$

De plus, la fonction Γ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et à l'égalité $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

---

(1) Adrien-Marie Legendre (1752–1833), spécialiste notamment de théorie des nombres, il avait conjecturé la loi de réciprocité quadratique et le théorème des nombres premiers, il a démontré le grand théorème de Fermat pour $n = 5$, mais il a aussi contribué à la mécanique céleste. Ses travaux ont eu beaucoup d'influence, sur Galois en particulier. Stendhal (qui était bon mathématicien et mauvaise langue), en dit, dans la *Vie de Henry Brulard* :

> Le célèbre Legendre, géomètre de premier ordre, recevant la croix de la Légion d'Honneur, l'attacha à son habit, se regarda au miroir et sauta de joie. L'appartement était bas, sa tête heurta le plafond, il tomba à moitié assommé. Digne mort c'eût été pour ce successeur d'Archimède !

Démonstration. On applique le théorème standard de dérivation sous le signe intégrale rappelé page 8. Ici, $T = U =]0,+\infty[$ et $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$, qui est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont les dérivées successives par rapport à x sont

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}$$

comme le montre une récurrence immédiate. Ces dérivées sont toutes continues (et dérivables !) sur $T \times U$. Ici on voit clairement qu'une inégalité de la forme

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq g(t)$$

(domination par une fonction intégrable g) n'est pas possible sans restriction sur le domaine où varie x : la fonction n'est pas bornée pour $t > 1$ lorsque $x \to \infty$ (et de même pour $t < 1$ pour $x \to 0$). Nous allons montrer la domination sur les intervalles compacts $K = [a,b] \subset U =]0,+\infty[$. Et, en effet, pour $x \in [a,b]$, on a(2)

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq g_K(t) = e^{-t}(\ln t)^k \max(t^{a-1}, t^{b-1})$$

... et la fonction g_K est intégrable sur $]0,+\infty[$:

– elle est continue et donc intégrable sur les intervalles fermés bornés de $]0,+\infty[$,
– pour t proche de 0, $g_K(t) \leq t^{c-1}$ pour $c < a$,
– pour t assez grand, $g_K(t) \leq e^{-t}t^{d-1}$ pour $d > b$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique donc à Γ et à ses dérivées.

La satisfaction de l'équation fonctionnelle résulte d'une simple intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t}t^x\,dt &= -\int_a^b t^x\,d(e^{-t})\\ &= \left[-te^{-t}\right]_a^b + \int_a^b xe^{-t}t^{x-1}\,dt\end{aligned}$$

en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, ceci donne bien que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et, comme

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

on a bien par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Outre cette relation, la fonction Γ est le centre de nombreuses formules, dont voici une toute première, la formule de Stirling. Elle décrit le comportement asymptotique de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to +\infty$. On écrit

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \text{ et on pose } t = x + \sqrt{x}u,$$

ainsi $dt = \sqrt{x}\,du$ et

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-x-\sqrt{x}u}e^{x\ln(x+\sqrt{x}u)}\sqrt{x}\,du\\ &= \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}u+x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\,du\end{aligned}$$

Il suffira de montrer que l'intégrale tend vers $\sqrt{2\pi}$ lorsque x tend vers $+\infty$ pour en déduire :

***Théorème II.1.2* (Formule de Stirling)**

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \quad \textit{pour } x \to +\infty.$$

(2) Résoudre l'exercice II.2 n'est peut-être pas inutile ici...

Démonstration. Posons
$$f(x,u)=\begin{cases} e^{-\sqrt{x}u+x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)} & \text{si } u\geq -\sqrt{x}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
Ainsi notre intégrale est $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du$. Pour tout $u\in\mathbf{R}$, quand $x\to+\infty$, on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x,u) &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(-\sqrt{x}u+x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(-\sqrt{x}u+x\left(\frac{u}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).\end{aligned}$$
D'autre part, si $u\in]-\sqrt{x},0]$, comme $|u|/\sqrt{x}<1$, on a
$$f(x,u)=\exp\left((-\sqrt{x}u+x)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n(\sqrt{x})^n}\right)=\exp\left(\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{nx^{n/2-1}}\right)\leq\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$
(c'est le premier terme).

Enfin, on voit que, pour $u\in]0,+\infty[$, $f(x,u)$ est une fonction décroissante de $x\in]0,+\infty[$, ce dont on déduit que, pour $u>0$ et $x\in[1,+\infty[$, on a
$$f(x,u)\leq f(1,u)=(1+u)e^{-u}$$
et donc, pour tout $u\in\mathbf{R}$ et tout $x\in[1,+\infty[$, on a $0\leq f(x,u)\leq g(u)$, où g est la fonction intégrable définie sur $\mathbf{R}$ par
$$g(u)=\begin{cases} e^{-u^2/2} & \text{si } u\leq 0\\ (1+u)e^{-u} & \text{si } u\geq 0.\end{cases}$$
Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale qui nous intéresse tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$, qui vaut $\sqrt{2\pi}$ (voir l'exercice I.8 ou la remarque II.2.8 ci-dessous).

L'assertion sur la décroissance de $f(x,u)$ comme fonction de x se démontre ainsi : d'abord, l'exponentielle est croissante, donc il suffit de montrer que $-\sqrt{x}u+x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)$ est une fonction décroissante de x ; ensuite on fait le changement de variable $t=\sqrt{x}/u$, et il reste à montrer que la fonction
$$t\mapsto u^2t^2\left(-\frac{1}{t}+\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)$$
est une fonction décroissante, mais $t\mapsto t^2$ est croissante et positive, $t\mapsto\left(-\frac{1}{t}+\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)$ est croissante négative, donc le produit est décroissant. □

Une variante de la formule de Stirling est, en appliquant l'équation fonctionnelle :

Corollaire II.1.3 **(Formule de Stirling, variante)**

$$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\ \textit{quand}\ x\to+\infty.$$

□

La formule suivante est due à Gauss.

Théorème II.1.4 **(Formule de Gauss[(4)])**

$$\forall\, x\in]0,+\infty[,\qquad \frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!\,n^x}.$$

[(4)] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), a été surnommé « le prince des mathématiciens », c'est dire. Il était précoce, brillant, célèbre et austère. Il a laissé des travaux nombreux sur pratiquement tous les domaines des mathématiques, ceci incluant l'astronomie. Son livre de théorie des nombres *Disquisitiones arithmeticae*, paru en 1801, a réorganisé cette discipline.

Démonstration. En appliquant l'équation fonctionnelle un certain nombre de fois, on a

$$\Gamma(x)x(x+1)\cdots(x+n) = \Gamma(x+n+1).$$

De plus, en appliquant deux fois la formule de Stirling,
- une fois à $\Gamma(x+n+1)$
- l'autre à $\Gamma(n+1)$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+n+1)}{n!\,n^x} &= \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)\,n^x}\\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(x+n)}\,(x+n)^{x+n}e^{-(x+n)}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}}\\ &\sim \sqrt{\frac{x+n}{n}}\Big(\frac{x+n}{n}\Big)^x e^{-x}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\end{aligned}$$

On remarquera que les $\sqrt{2\pi}$ disparaissent et que la valeur exacte de l'intégrale gaussienne n'était pas nécessaire pour ce calcul. Les deux premiers facteurs tendent vers 1 alors que les deux suivants tendent respectivement vers e^{-x} et e^x. □

Et maintenant Weierstrass[5]. Cette formule fait intervenir la constante d'Euler, dont on commence par rappeler la définition : comme

$$0 \le \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k^2}$$

le terme central est le terme général d'une série convergente, on appelle γ sa somme. Remarquons que

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n\right),\end{aligned}$$

ce qui est une autre définition possible de γ. On a $\gamma = 0{,}577\ldots$, et nul ne sait si ce nombre est rationnel, irrationnel, algébrique, transcendant...

***Théorème II.1.5* (Formule de Weierstrass)**

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}.$$

Démonstration. De la définition de γ, il suit que

$$e^{-\gamma x} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-x}{k} + x\ln n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\prod e^{-x/k}\right)n^x$$

[5] Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815–1897) est un des inventeurs de l'analyse moderne, comme les noms du théorème de Bolzano-Weierstrass, et de nombreuses fonctions et résultats de ce cours peuvent (à raison) le laisser imaginer.

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} n^x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} e^{-x/k} = 1.$$

Il reste à appliquer la formule de Gauss

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!\,n^x} = \lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) n^{-x} = \lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} e^{-x/k}.$$

□

II.2. La fonction Γ comme fonction de variable complexe

Proposition II.2.1. *L'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$*. Elle définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan. Pour* $\mathrm{Ré}(z) > 0$ *et tout* $k \in \mathbf{N}$*, on a*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{z-1}\,dt.$$

Démonstration. L'essentiel est que, pour $z \in \mathbf{C}$ et $t \in]0,+\infty[$, on a $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\mathrm{Ré}(z)-1}$. Donc, pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a

$$t \in]0,+\infty[, \quad \mathrm{Ré}(z) \in [a,b] \Rightarrow \left|e^{-t}t^{z-1}\right| \le e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \text{ (fonction intégrable sur }]0,+\infty[)$$

donc l'intégrale est absolument convergente pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$ et les autres assertions suivent des résultats habituels sur les fonctions holomorphes. □

L'équation fonctionnelle

$$\mathrm{Ré}(z) > 0 \Rightarrow \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

se démontre de la même façon que dans le cas réel, ou par prolongement analytique, et donne, par récurrence : si n est un entier ≥ 1, on a, pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)},$$

expression dans laquelle le membre de droite a un domaine de définition plus grand que celui du membre de droite. On profite de cette aubaine pour prolonger Γ au demi-plan $\mathrm{Ré}(z) > -n$, en une fonction méromorphe avec un pôle simple en chaque entier négatif $> -n$, et à faire ça pour tout n. Ce qui donne :

Proposition II.2.2. *La fonction* Γ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$ *tout entier. Elle est holomorphe sur* $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$*. Pour tout* $n \in \mathbf{N}$*, elle a un pôle simple en* $-n$*, de résidu* $(-1)^n/n!$*.*

Elle satisfait aux équations fonctionnelles

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ et } \Gamma(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z+k)^{-1}\Gamma(z+n).$$

Démonstration. La seule chose restant à faire est le calcul du résidu. Le voici :

$$\mathrm{rés}_{-n}(\Gamma) = \lim_{z\to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

On étend maintenant à $\mathbf{C}$ les formules de Gauss et de Weierstrass.

Lemme II.2.3. *Le produit infini*

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

est normalement convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$ *et définit donc une fonction entière de* z*.*

Démonstration. Le terme général est de la forme $(1+x)e^{-x}$. On considère donc la fonction entière (de $w \in \mathbf{C}$)
$$g(w) = (1+w)e^{-w} - 1.$$
On a $g(0) = 0$ et $g'(w) = -we^{-w}$ donc $g'(0) = 0$, et donc
$$\forall\, R > 0, \quad \exists\, M \geq 0 \text{ tel que } |w| \leq R \Rightarrow \left|(1+w)e^{-w} - 1\right| \leq M\,|w|^2\,.$$
On a donc, pour $|z| \leq R$ et pour tout k,
$$\left|\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} - 1\right| \leq M\frac{R^2}{k^2}$$
d'où la convergence normale annoncée et la conséquence que le produit infini est une fonction entière. □

Proposition II.2.4. *La fonction méromorphe $\Gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ne s'annule nulle part. La fonction entière $1/\Gamma$ est donnée par les formules de Gauss et de Weierstrass*
$$\forall\, z \in \mathbf{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.$$

Démonstration. On commence par la dernière formule : dans le produit infini, nous avons une fonction entière qui, par la formule de Weierstrass dans le cas réel, coïncide avec $1/\Gamma$ sur $]0, +\infty[$. Le principe du prolongement analytique montre alors que $1/\Gamma$ est entière et que la formule est valable partout. En particulier, Γ ne s'annule pas.

On démontre comme sur $\mathbf{R}$ que les deux formules sont égales. □

***Remarque* (Et la formule de Stirling ?)**. Étendre la formule de Stirling au cas complexe serait plus délicat. Dans l'énoncé apparaissent $\sqrt{x}$ et x^x (et donc $\log x$). Outre le besoin d'une détermination du logarithme, l'affaire exigerait aussi que l'on examinât la signification de « $x \to +\infty$ ».

Le calcul de la dérivée logarithmique d'un produit infini (proposition IV.2.3) donne :

Corollaire II.2.5. *La fonction Γ'/Γ est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Elle s'écrit comme somme d'une série de fonctions méromorphes (normalement convergente sur tout compact)*
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right) \quad \textit{pour } z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N}).$$

Démonstration. La fonction $-\Gamma'/\Gamma$ est la dérivée logarithmique de $1/\Gamma$, que l'on calcule avec la formule de Weierstrass. Ce qui donne la formule voulue. □

Remarque II.2.6. On en déduit que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

La formule suivante est celle dite « des compléments ». On calcule
$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(-z)} &= ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}(-z)e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}\\ &= -z^2\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right),\end{aligned}$$
produit infini dont nous avons vu (proposition IV.3.1) qu'il est égal à $\sin \pi z/\pi z$. Comme $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, on en déduit :

***Proposition II.2.7* (Formule des compléments)**. *Pour tout $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$, on a*
$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Remarque II.2.8. Ce qui donne aussi, en $z = 1/2$, la valeur de l'intégrale gaussienne

$$\frac{1}{\Gamma(1/2)^2} = \frac{1}{\pi} \text{ donc } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Mais

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2}\, dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

(en faisant le changement de variable $t = u^2$).

Venons-en maintenant à la question de l'unicité des solutions de l'équation fonctionnelle de la fonction Γ, à laquelle une réponse est apportée par le théorème suivant.

***Théorème II.2.9* (Théorème de Wielandt)**. *Soit F est une fonction holomorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Ré}(z) > 0$ *qui satisfait à*

(1) $F(z+1) = zF(z)$,

(2) *F est bornée sur la bande verticale*

$$B = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leq \mathrm{Ré}(z) < 2\}.$$

Alors $F(z) = F(1)\Gamma(z)$.

Démonstration. On commence par vérifier que Γ satisfait bien à la seconde propriété. On a

$$|\Gamma(z)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-t} t^{z-1} \right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\mathrm{Ré}(z)-1}\, dt = \Gamma(\mathrm{Ré}(z))$$

et la fonction réelle et continue Γ est bien bornée sur $[1, 2]$.

On démontre maintenant le théorème. On considère la fonction f définie par

$$f(z) = F(z) - F(1)\Gamma(z).$$

On veut montrer qu'elle est identiquement nulle. Déjà, on a $f(1) = 0$. Elle est holomorphe pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$ et on a

$$f(z+1) = zF(z) - F(1)z\Gamma(z) = z(F(z) - F(1)\Gamma(z)) = zf(z)$$

donc on peut la prolonger (comme on l'a fait pour Γ) en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec, a priori, des pôles simples en les entiers négatifs. Un calcul analogue à celui fait pour la démonstration de la proposition II.2.2 donne le résidu en $-n$, qui est $(-1)^n f(1)/n! = 0$. Donc f est une fonction entière. Elle est bornée sur la bande B, montrons qu'elle est bornée sur $\mathbf{C}$ tout entier.

– Comme elle est entière, elle est en particulier continue, et donc bornée, sur le rectangle (compact) $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$ et $0 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1$,

– sur $0 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1$ et $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$, on écrit

$$f(z) = \frac{f(z+1)}{z} \text{ et } \left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{1 + |y|}{y^2} \leq 2,$$

ce qui, comme le numérateur est borné ($z+1$ est dans la bande B), donne que f est bornée dans toute la bande verticale $0 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1$.

Il y a une jolie petite ruse pour conclure. On considère $g(z) = f(z)f(1-z)$ (parce que $z \mapsto 1 - z$ envoie la bande $0 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1$ dans elle-même), qui est (d'après ce qui précède) bornée dans cette bande. Mais on a

$$\begin{aligned} g(z+1) &= f(z+1)f(-z) \\ &= zf(z)f(-z) \\ &= -f(z)(-zf(-z)) \\ &= -f(z)f(1-z) = -g(z) \end{aligned}$$

donc g est bornée sur $\mathbf{C}$. Étant entière, elle ne peut se dispenser d'être constante et

$$g(z) = g(1) = f(1)f(0) = 0 \text{ puisque } f(1) = 0$$

donc $g = 0$ et enfin $f = 0$ par le principe des zéros isolés. □

On utilise cette unicité pour montrer, par exemple, les formules suivantes, dues à Legendre dans le cas $p = 2$ et à Gauss dans le cas général.

***Proposition II.2.10* (Formule de multiplication de Legendre-Gauss)**. *Pour tout $z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N})$ et pour tout entier $p \geq 1$, on a*

$$\prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{p}\right) = (2\pi)^{(p-1)/2} p^{1/2-z}\Gamma(z).$$

Pour $p = 2$ la formule de Legendre dit simplement

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

Démonstration. On pose

$$F(z) = \Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right)\Big/(2\pi)^{(p-1)/2}p^{1/2-z}$$

et on montre que $F = \Gamma$ en utilisant le théorème de Wielandt. Comme Γ est bornée sur $1 \leq \text{Ré}(z) < 2$ et comme

$$\left|p^{z-1/2}\right| \leq p^{\text{Ré}(z)-1/2}$$

l'est aussi, alors F vérifie elle aussi cette propriété. Montrons que F est solution de l'équation fonctionnelle de la fonction Γ. On a

$$\begin{aligned}
F(z+1) &= \Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+1+p-1}{p}\right)\Big/(2\pi)^{(p-1)/2}p^{1/2-z-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{z+p}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)}F(z)p, \text{ mais } \Gamma\left(\frac{z}{p}+1\right) = \frac{z}{p}\Gamma\left(\frac{z}{p}\right) \\
&= \frac{z}{p}F(z)p = zF(z).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à démontrer que $F(1) = 1$, ce qui n'est pas complètement trivial. On écrit

$$F(1) = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma(1)\Big/(2\pi)^{(p-1)/2}p^{-1/2}$$

et on regroupe les termes $\Gamma(\frac{k}{p})\Gamma(1-\frac{k}{p})$ pour utiliser la formule des compléments. Pour ne pas avoir à compter les termes, il y a une petite ruse, qui fait apparaître $F(1)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
F(1) &= \frac{p^{1/2}}{(2\pi)^{(p-1)/2}}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\cdots\sqrt{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \\
&\qquad \text{(les valeurs de } \Gamma \text{ apparaissant dans ce produit sont réelles positives)} \\
&= \frac{p^{1/2}}{(2\pi)^{(p-1)/2}}\sqrt{\frac{\pi^{p-1}}{\prod_{j=1}^{p-1}\sin\left(\pi\frac{j}{p}\right)}} \text{ (par la formule des compléments)} \\
&= \frac{p^{1/2}}{2^{(p-1)/2}}\frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{p-1}\sin\left(\pi\frac{j}{p}\right)}},
\end{aligned}$$

dont nous voulons montrer que c'est égal à 1. Il reste à vérifier que

$$\prod_{j=1}^{p-1}\sin\left(\frac{j\pi}{p}\right) = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

On écrit

$$\sin u = \frac{e^{iu}(1-e^{-2iu})}{2i},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}(2i)^{p-1}\prod_{j=1}^{p-1}\sin\left(\frac{j\pi}{p}\right) &= \prod_{j=1}^{p-1} e^{ij\pi/p}\left(1-e^{-2ij\pi/p}\right)\\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{j\pi}{p}\right)\prod_{j=1}^{p-1}\left(1-e^{-2ij\pi/p}\right)\\ &= \exp\left(\frac{i(p-1)\pi}{2}\right)\prod_{j=1}^{p-1}\left(1-e^{-2ij\pi/p}\right).\end{aligned}$$

Le premier facteur est un attendu i^{p-1}, alors que le deuxième est la valeur en $X=1$ du polynôme $(X^p-1)/(X-1)$, c'est-à-dire p. □

Exercices sur la fonction Γ

Exercice II.1. Trouver une fonction entière (non constante) qui prend la valeur 1 en tous les entiers.

Exercice II.2. Dessiner le graphe de la fonction $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ (de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$).

Exercice II.3. Dessiner les graphes des fonctions t^{x-1}, sur $]0,+\infty[$, pour $x\in]0,+\infty[$, puis le graphe de la fonction $t\mapsto\sup(t^{a-1},t^{b-1})$ pour $0<a<b<+\infty$.

Exercice II.4. Montrer que la formule

$$f(z)=\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

définit une fonction entière.

Exercice II.5. Dessiner le graphe de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$.

***Exercice II.6* (Transformation de Mellin)**.

(1) Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. On écrit

$$u(z)=\int_0^1 g(t)t^{z-1}\,dt.$$

Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour z tel que $\operatorname{Ré} z\geq r>0$ et $s\geq 1$, on ait

$$\left|g\left(\frac{1}{s}\right)s^{-z-1}\right|\leq Cs^{-r-1}.$$

En déduire que l'écriture ci-dessus définit une fonction u holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Ré} z>0$.

(2) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide[6] sur $[0,+\infty[$. On écrit

$$v(z)=\int_1^{+\infty} f(t)t^{z-1}\,dt.$$

Montrer qu'il existe une constante $K>0$ telle que, pour z tel que $\operatorname{Ré} z\leq r$ et $t\geq 1$, on ait

$$\left|f(t)t^{z-1}\right|\leq|f(t)|\,t^{r-1}\leq Kt^{-2}.$$

En déduire que l'écriture ci-dessus définit une fonction entière v.

(3) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide sur $[0,+\infty[$. Montrer que l'écriture

$$M(f)(z)=\int_0^{+\infty} f(t)t^{z-1}\,dt$$

définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Ré} z>0$.

---

[6] C'est-à-dire que f est dans l'espace de Schwartz

$$\left\{f:[0,+\infty[\to\mathbf{C}\mid f\in\mathcal{C}^\infty \text{ et } \forall\, m,n\geq 0,\exists\, C\geq 0 \text{ telle que } \left|t^m f^{(n)}(t)\right|\leq C\right\}.$$

(4) Fixons un entier $n \geq 0$. Écrivons

$$f(t) = T_n(f)(t) + t^n g(t) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + t^n g(t).$$

Montrer que $M(f)$ s'écrit comme la somme de trois termes

$$M(f)(z) = \int_1^{+\infty} f(t)t^{z-1}\,dt + \int_0^1 g(t)t^{n+z-1}\,dt + \int_0^1 T_n(f)(t)t^{z-1}\,dt,$$

– le premier est une fonction entière
– le deuxième est une fonction holomorphe sur $\text{Ré}\, z > -n$,
– le troisième est une fraction rationnelle.

Calculer le troisième terme, déterminer ses pôles et leurs résidus.

Montrer que $M(f)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Quels sont ses pôles ?

(5) Montrer que

$$M(t^p f)(z) = M(f)(z+p) \qquad \text{et} \qquad M(f')(z) = -(z-1)M(f)(z-1).$$

On suppose que f est solution d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux

$$P_0(t)f(t) + \cdots + P_n(t)f^{(n)}(t) = 0 \qquad P_i \in \mathbf{C}[X].$$

Montrer que $M(f)$ satisfait à une équation fonctionnelle

$$Q_0(z)M(f)(z-n) + \cdots + Q_m(z)M(f)(z+m-n) = 0.$$

Exemples.

(a) Si f satisfait à $f' + f = 0$, quelle est l'équation fonctionnelle ?
(b) Si f satisfait à $f'' - zf = 0$, même question.

Exercice II.7. Montrer que la restriction à $\mathbf{R}$ de la fonction Γ est à valeurs réelles. Dessiner son graphe. Indications : montrer que $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est strictement convexe ; pour $x \in \mathbf{R} - (-\mathbf{N})$, montrer que $\Gamma(x)$ est réel ; montrer que, sur chacun des intervalles où elle est définie, $x \mapsto \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ est une fonction strictement croissante de x. Dessiner le paysage analytique de la fonction Γ sur $\mathbf{C}$.

Exercice II.8. Montrer que, pour $z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z\Gamma(n)} = 1.$$

Exercice II.9. Soit f une fonction analytique sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$ et qui satisfait aux deux propriétés

(1) $f(z+1) = zf(z)$, (2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(z+n)}{n^z f(n)} = 1.$

Montrer que $f(z) = \Gamma(z)f(1)$.

Exercice II.10 **(Une démonstration de la formule de duplication pour la fonction Γ)**

(1) Montrer que la série de fonctions méromorphes $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$. Montrer que sa somme est égale à $(\Gamma'/\Gamma)'$.

(2) Montrer que la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)\Gamma(2z)^{-1}$ est constante.

(3) Montrer que l'on a $\Gamma(2z) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^{2z}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$.

Exercice II.11. Montrer que, pour $y \in \mathbf{R}$, on a

(1) $|\Gamma(iy)|^2 = \dfrac{\pi}{y\sinh(\pi y)}$, (2) $\left|\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \dfrac{\pi}{\cosh(\pi y)}$.

On pourra utiliser la formule des compléments.

***Exercice II.12* (La fonction bêta d'Euler[7])**. Soit $D \subset \mathbf{C}$ le demi-plan

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}(z) > 0\}.$$

Pour $(z, w) \in D^2$, on écrit

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, dt$$

(ce qu'on prononce « bêta de zed et double vé », la lettre B est un β majuscule).

(1) Montrer que B est une fonction continue sur D^2 et que
   - pour tout $z \in D$, $w \mapsto B(z, w)$ est analytique, et de même que
   - pour tout $w \in D$, $z \mapsto B(z, w)$ est analytique.

(2) Vérifier que, pour tous (z, w), on a

(a) $B(z+1, w) = \dfrac{z}{z+w} B(z, w)$, (b) $B(1, w) = \dfrac{1}{w}$.

(3) Vérifier que la fonction

$$f(z) = \frac{B(z, w)\Gamma(z+w)}{\Gamma(w)}$$

a les même propriétés que la fonction Γ et donc que, pour $(z, w) \in D^2$, on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

(4) Montrer que

(a) $B(z, w) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}\, dt$, (b) $B(z, w) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2z-1}(\cos\varphi)^{2w-1}\, d\varphi$.

***Exercice II.13* (Volume de la boule)**. Soit $B_n(r)$ la boule unité de rayon r dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et soit $\mu_n(r)$ son volume. Montrer que $\mu_n(r) = r^n \mu_n(1)$ et que

$$\mu_n(1) = 2\mu_{n-1}(1) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

***Exercice II.14* (La série hypergéométrique de Gauss)**. Dans cet exercice, a, b et c sont des nombres réels, et on suppose que c n'est pas un entier négatif. On définit la série hypergéométrique de Gauss par

$$F(a, b, c|z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)n!} z^n.$$

On suppose d'abord que a ou b est un entier négatif. Que peut-on dire de F ? On suppose maintenant que ce n'est pas le cas. Montrer que le rayon de convergence de la série vaut 1. Pour quelles valeurs de a, b et c l'intégrale

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\, dt$$

est-elle définie ? Montrer que, lorsque c'est le cas, on a (c'est une formule d'Euler) :

$$F(a, b, c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\, dt.$$

[7] Le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707–1783) n'était certes pas un bêta, si l'on en juge par l'immensité de son œuvre, qu'il est exclu de seulement évoquer ici. Signalons seulement la présence dans ce texte la constante d'Euler, de la fonction indicatrice d'Euler, de la fonction bêta, d'au moins trois formules d'Euler (fonction hypergéométrique, valeur de $\zeta(2n)$, formule sommatoire d'Euler-MacLaurin)...

CHAPITRE III

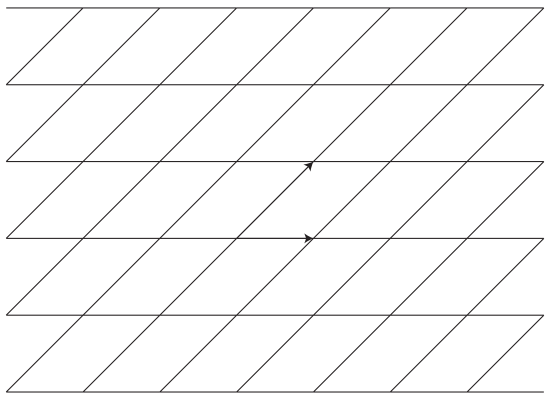
NOTES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Leur nom vient de celui des « intégrales elliptiques », qui vient lui-même de l'intégrale obtenue en cherchant à « rectifier » (paramétrer par la longueur d'arc) une ellipse[1] (voir l'exercice III.17 et le § III.7).

III.1. Réseaux dans C

On se donne ici deux nombres complexes u et v, indépendants sur $\mathbf{R}$ (c'est dire que la partie imaginaire du rapport u/v n'est pas nulle) et on considère le *réseau*

$$\Lambda = \{nu + mv \mid n, m \in \mathbf{Z}\}.$$



La proposition suivante est une application du théorème de Liouville.

Proposition III.1.1. *Les seules fonctions holomorphes sur* $\mathbf{C}$ *telles que*

$$f(z+\lambda) = f(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \forall\, \lambda \in \Lambda$$

sont les constantes.

Démonstration. Sur le parallélogramme engendré par u et v, c'est-à-dire sur le compact

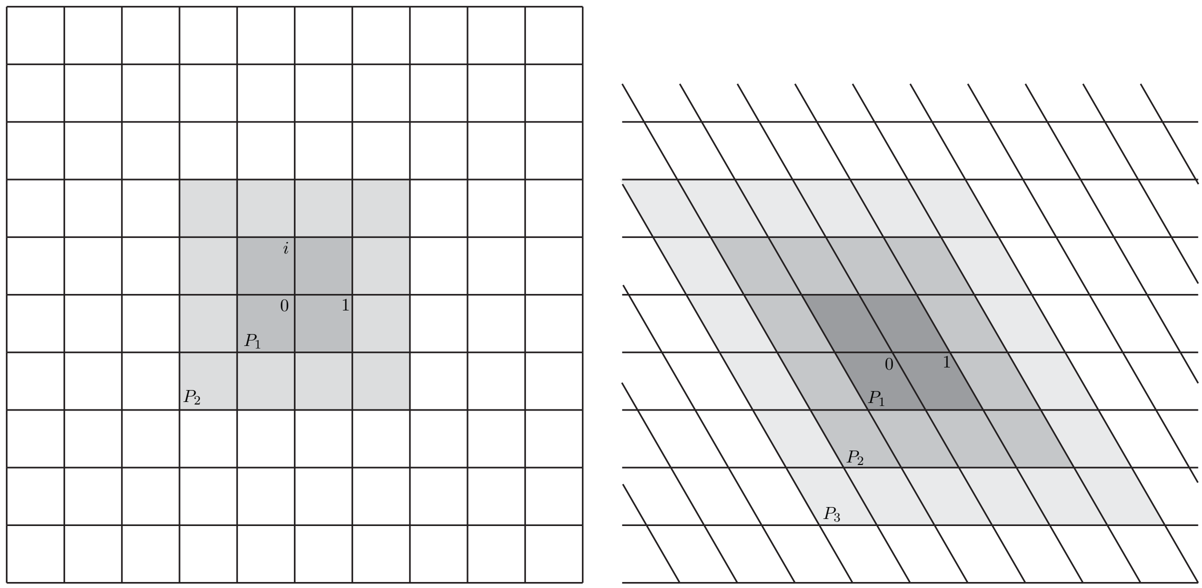
$$\{xu + yv \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$$

la fonction f est bornée. De la périodicité, on déduit qu'elle est bornée sur $\mathbf{C}$: tout point z de $\mathbf{C}$ se ramène à un point du parallélogramme en lui appliquant une translation du réseau. Donc f est entière et bornée, donc f est constante. □

Voici un lemme utile :

[1] Une ellipse est une conique, courbe de degré 2, c'est dire qu'une droite rencontre cette courbe en deux points (réels ou imaginaires, distincts ou confondus), alors que les courbes dites « elliptiques » qui interviennent ici sont, elles, de degré 3, c'est dire qu'une droite les coupe en trois points (voir l'exercice III.12 pour une très belle et importante application de cette remarque). Bref, une terminologie bien établie mais trompeuse pour les débutants.

Lemme III.1.2. *La série* $\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\dfrac{1}{|\lambda|^3}$ *est convergente.*



Démonstration du lemme. Pour tout entier n, on considère

$$P_n = \{xu + yv \mid \sup\{|x|, |y|\} = n\}.$$

Sur le parallélogramme P_n, il y a $8n (= 4 \times 2n)$ points de Λ. Si d est la plus petite distance des points de P_1 à 0, on a pour $\lambda \in P_n$, $|\lambda| \geq dn$. Ainsi

$$\sum_{\lambda\in P_n}\frac{1}{|\lambda|^3} \leq \frac{8n}{d^3n^3} = \frac{8}{d^3n^2}$$

d'où l'on déduit la convergence de la série. □

Remarque III.1.3. Plus généralement, la même démonstration donne que la série $\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\dfrac{1}{|\lambda|^k}$ est convergente pour $k > 2$.

III.2. La fonction $\wp$ de Weierstrass

Il n'y a donc pas de fonctions holomorphes « bi-périodiques » vraiment intéressantes. Par contre, il y a des fonctions méromorphes, comme celle que nous allons définir maintenant.

Proposition III.2.1. *La série*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C} - \Lambda$ *et définit une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$.

Démonstration de la proposition. La démonstration est basée sur le lemme III.1.2. On montre que la série converge uniformément sur tous les disques $|z| \leq R$. Le réseau est discret, son intersection avec tous les disques est finie, en particulier, on a $|\lambda| \geq 2R$ pour tous les λ sauf un nombre fini.

Pour tous ces λ et pour tout z dans le disque de rayon R,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right| &= \left|\frac{\lambda^2-(z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \left|\frac{2\lambda z-z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \frac{\left|z\left(2-\dfrac{z}{\lambda}\right)\right|}{|\lambda|^3\left|1-\dfrac{z}{\lambda}\right|^2} \\ &\leq 10\frac{R}{|\lambda|^3}\end{aligned}$$

qui converge grâce au lemme.

On a utilisé les inégalités

$$\left|2-\frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{5}{2} \text{ et } \left|1-\frac{z}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{2}$$

qui viennent des positions relatives de z et λ : comme $|z| \leq |\lambda|/2$,

– l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\lambda-\frac{z}{2}\right| \leq \left|\frac{z}{2}\right| + |\lambda| \leq \frac{5}{4}|\lambda|$$

d'où la première inégalité

– et de même

$$|\lambda-z| \geq |\lambda|-|z| \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

pour la deuxième.

On a maintenant une série de fonctions méromorphes qui converge uniformément sur les compacts. Sa somme est méromorphe sur $\mathbf{C}$ (en application du théorème de Morera). De plus, la série des dérivées converge uniformément sur les compacts vers la dérivée de la somme, ce qu'on va utiliser tout de suite. □

On note $\wp$ (et on appelle « la fonction $\wp$ de Weierstrass ») la somme de cette série. Elle dépend du réseau choisi et devrait être (est souvent) notée $\wp_\Lambda$.

La fonction $\wp$ a un pôle (double) en chaque point du réseau Λ : on fixe un point λ et on écrit

$$\wp(z) = \frac{1}{(z-\lambda)^2} + g(z)$$

où g est holomorphe au voisinage de λ.

Elle est paire :

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\neq 0}\left(\frac{1}{(z+\lambda)^2}-\frac{1}{z^2}\right)$$

expression dans laquelle il suffit de changer λ en $-\lambda$ pour voir qu'elle vaut aussi $\wp(z)$.

Sa dérivée est la somme de la série des dérivées, comme on l'a déjà mentionné, donc

$$\wp'(z) = -2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

En particulier, il est clair que

$$\wp'(z+\lambda) = \wp'(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

Donc $\wp'$ est bi-périodique, de plus elle est impaire.

Proposition III.2.2. *La fonction $\wp$ est bi-périodique.*

Démonstration. On montre que

$$\wp(z+u) = \wp(z) \text{ et } \wp(z+v) = \wp(z).$$

Comme $\wp'$ est bi-périodique, on a

$$\frac{d}{dz}\left(\wp(z+u) - \wp(z)\right) = 0$$

donc $\wp(z+u) - \wp(z)$ est constante. On calcule la constante en évaluant en $z = -u/2$ (qui n'est pas un pôle), on trouve

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

qui est nul puisque $\wp$ est paire. On procède de même avec v. □

***Proposition III.2.3**. La fonction $\wp$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, paire et bi-périodique. Ses pôles sont les points du réseau Λ. En plus, $\wp$ vérifie la relation*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

où g_2 et g_3 sont des constantes définies par le réseau Λ.

Démonstration. Seule la relation est à démontrer. On développe $\wp$ en série de Laurent sur un voisinage épointé de 0. Le développement a la forme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \cdots$$

parce que $\wp$ est paire et que

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda \neq 0}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) = g(z),$$

avec $g(0) = 0$. La fonction g permet de calculer les premiers coefficients du développement (en dérivant terme à terme) :

$$b_2 = 3\sum_{\lambda \neq 0}\frac{1}{\lambda^4}, \quad b_4 = 5\sum_{\lambda \neq 0}\frac{1}{\lambda^6}.$$

On dérive terme à terme le développement de $\wp$ pour obtenir

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2b_2 z + 4b_4 z^3 + \cdots,$$

relation qu'on élève au carré :

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = \frac{4}{z^6} - 8\frac{b_2}{z^2} - 16b_4 + \cdots.$$

On a ainsi

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 = -20\frac{b_2}{z^2} - 28b_4 + \cdots,$$

ce qui fait que la fonction

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 + 20b_2\wp(z) + 28b_4$$

est holomorphe au voisinage de 0 et nulle en 0. Mais elle est bi-périodique, donc elle est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc constante, et donc, enfin, nulle. □

***Remarque III.2.4**.* Le fait que $\wp$ satisfasse une équation différentielle algébrique

$$(y')^2 = P(y)$$

pour un polynôme P de degré 3 fait qu'elle intervient dans la solution de nombreux problèmes de mécanique, comme par exemple la description du mouvement d'une toupie (comme on le savait déjà avant de faire de l'analyse complexe) ou plus généralement d'un solide (comme cela a brillamment été démontré, en utilisant l'analyse complexe, par Kowalevskaya).

Remarque III.2.5. La courbe C d'équation $y^2 = 4x^3 + a_2x + a_4$ (dans $\mathbf{C}^2$) est une *courbe elliptique*. Les fonctions $\wp$ et $\wp'$ permettent de la paramétrer

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\longrightarrow C \\ z &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

(pour bien faire, on ajoute un point à l'infini à C et on envoie les points du réseau sur ce point à l'infini). Cette application passe au quotient en un isomorphisme (analytique)

$$\mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow C.$$

Comme $\mathbf{C}/\Lambda$ est un tore (homéomorphe à $S^1 \times S^1$), eh bien C aussi. Et comme $\mathbf{C}/\Lambda$ est un groupe, eh bien C aussi. On peut construire cette structure de groupe en regardant les intersections de C avec les droites de $\mathbf{C}^2$ (voir les exercices III.5, III.6, III.9 et III.12), c'est très joli.

Les courbes elliptiques sont des objets omniprésents en mathématiques. On a mentionné la mécanique et les équations différentielles algébriques, mais il y a aussi, par exemple, l'arithmétique. Leur intervention décisive dans la démonstration du grand théorème de Fermat, par exemple, est célèbre.

III.3. Corps des fonctions elliptiques

On dit qu'une fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, méromorphe et périodique par rapport au réseau Λ est elliptique et on note $\mathcal{M}(\mathbf{C}/\Lambda)$ l'ensemble de toutes ces fonctions. On a immédiatement :

Proposition III.3.1. *L'ensemble $\mathcal{M}(\mathbf{C}/\Lambda)$ est un corps.*

Comme on le voit sans trop de difficulté (exercice III.8), c'est le corps des fractions rationnelles en $\wp$ et $\wp'$.

III.4. Changer de réseau

Jusqu'ici, le réseau était fixé. On s'intéresse maintenant aux changements de réseaux. Pour simplifier, on suppose désormais que la base utilisée pour le réseau est directe (même orientation que $(1, i)$), il suffit éventuellement d'échanger u et v pour que ce soit le cas. On a alors $\operatorname{Im}(v/u) > 0$.

Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est un nombre complexe non nul, la multiplication par α est une similitude. Deux réseaux semblables ont des corps de fonctions isomorphes.

Proposition III.4.1. *Si $\alpha \in \mathbf{C}^\star$ et si $\Lambda' = \alpha\Lambda$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{C}/\Lambda) &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C}/\Lambda') \\ f &\longmapsto (z \mapsto f(\alpha z)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de corps.

C'est bien clair, l'isomorphisme inverse étant donné par $g \mapsto (z \mapsto g(\alpha^{-1}z)$. □

L'idée est maintenant de chercher, pour tout réseau Λ, un réseau semblable qui ait une forme « plus simple ».

Proposition III.4.2. *Pour tout réseau Λ, il existe un nombre complexe τ, avec $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ tel que Λ soit semblable à $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$.*

On amène la base directe (u, v) sur la base directe $(1, \tau)$ par la similitude $1/u$. □

Il reste à décider quand deux réseaux $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$ et $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau'$ sont semblables. Si c'est le cas, 1 et τ' sont les images d'éléments du réseau engendré par 1 et τ par une même similitude α. Donc il existe des nombres entiers a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \tau' = \alpha(a\tau + b) \\ 1 = \alpha(c\tau + d) \end{cases}$$

donc (notons que $c\tau + d \neq 0$ à cause de la deuxième égalité)

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Remarque III.4.3. Si a, b, c et $d \in \mathbf{R}$, on a, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $cz + d \neq 0$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (ad - bc)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

Ce qui se démontre par un simple calcul :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) = \frac{1}{2i}\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}(z - \overline{z}).$$

En particulier, ici, comme a, b, c et d sont entiers (donc réels), on a bien $\operatorname{Im}\tau' > 0$ dès que $\operatorname{Im}\tau > 0$... et le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un nombre réel positif.

Notons g cette matrice, de sorte que

$$g \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jusqu'ici on a écrit que $\tau' \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$, c'est-à-dire que $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau' \subset \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$. L'inclusion en sens inverse donne aussi une matrice à coefficients entiers, h, telle que

$$h \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = 1/\alpha \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $hg = \mathrm{Id}$, g et h sont inverses l'une de l'autre. Donc leurs déterminants sont inversibles dans $\mathbf{Z}$. Étant positifs, ils valent 1. Donc on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbf{Z})$.

Remarque III.4.4. Le groupe $\mathrm{SL}(2; \mathbf{Z})$ opère sur le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Oui, c'est une opération de groupes ! Mais on a

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z,$$

donc on considère plutôt que c'est le groupe

$$\Gamma = PSL(2; \mathbf{Z}) = \mathrm{SL}(2; \mathbf{Z}) / \{\pm \mathrm{Id}\}$$

(dit « groupe modulaire ») qui opère sur $\mathcal{H}$.

Bilan. On a démontré :

Théorème III.4.5. *Soient τ et $\tau' \in \mathcal{H}$. Les réseaux $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$ et $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau'$ sont semblables si et seulement si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\tau' = \gamma \cdot \tau$.*

III.5. Opération du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré

Voici deux exemples importants de transformations de Γ.

– D'abord $\tau' = \tau + 1$, les deux réseaux son identiques, la similitude est une translation, que l'on note T.

– Ensuite une rotation transforme $(1, \tau)$ en $(1, 1/\tau)$, et une base directe commençant par 1 de ce nouveau réseau est $(1, -1/\tau)$. La transformation $\tau \mapsto -1/\tau$ est notée S.

Proposition III.5.1. *On a $S^2 = \mathrm{Id}$, $(ST)^3 = \mathrm{Id}$ et $TS)^3 = \mathrm{Id}$.*

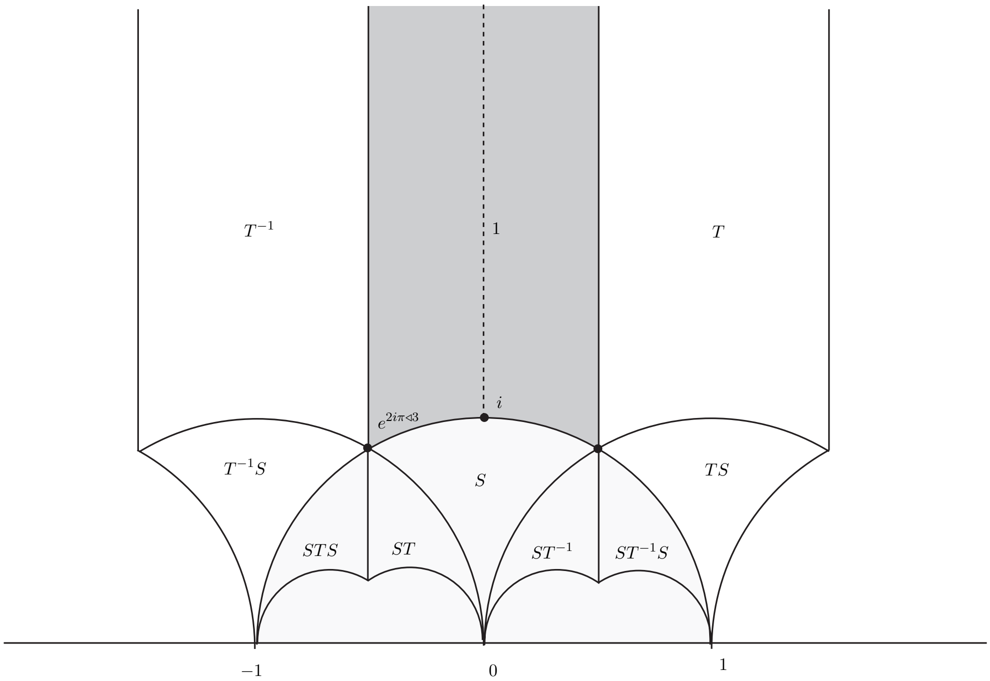
Démonstration. Il suffit de calculer, en remarquant que

$$ST(\tau) = -\frac{1}{\tau+1}, \quad (ST)(ST)(\tau) = -1 - \frac{1}{\tau}, \text{ etc.}$$

Après $(ST)^3 = \mathrm{Id}$, $(TS)^3 T = T(ST)^3 = T$ donc $(TS)^3 = \mathrm{Id}$. □

On appelle
$$\mathcal{F} = \left\{\tau \in \mathcal{H} \mid (-\frac{1}{2} \leq \text{Ré}\,\tau < \frac{1}{2} \text{ et } |\tau| > 1) \text{ ou } \tau = e^{i\alpha} \text{ avec } \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}\right\}$$
et, naturellement parce que c'est son adhérence
$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{\tau \in \mathcal{H} \mid |\text{Ré}\,\tau| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |\tau| \geq 1\right\}.$$

Il s'agit de la partie grisée de la figure, avec les bords pour $\overline{\mathcal{F}}$, une partie seulement d'entre eux pour $\mathcal{F}$. La figure indique aussi les images de cette partie grisée par certains éléments de Γ.



On va montrer que $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental pour l'opération de Γ, c'est-à-dire (que c'est un domaine mesurable et) qu'il contient un (et un seul) point de chaque orbite. On commence par un résultat un peu moins fort.

Proposition III.5.2. *Pour tout élément τ de $\mathcal{H}$, il existe un élément $\gamma \in \langle S, T\rangle \subset \Gamma$ tel que $\gamma \cdot \tau \in \mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit $\tau \in \mathcal{H}$. Il existe un entier n tel que $T^n\tau = \tau + n$ ait sa partie réelle dans $[-1/2, 1/2]$. Ensuite, si $|T^n\tau| \geq 1$, $T^n\tau \in \overline{\mathcal{F}}$. Si ce n'est pas le cas, alors $|ST^n\tau| > 1$ et $ST^n\tau \in \overline{\mathcal{F}}$. Donc on a ramené τ dans $\overline{\mathcal{F}}$. On peut bien sûr supposer que $\text{Ré}(T^n\tau) \in [-1/2, 1/2[$. Si $|T^n\tau| = 1$, écrivons $z = T^n\tau = e^{i\theta}$. Si θ peut être choisi entre $\pi/2$ et $2\pi/3$, alors $T^n\tau$ est dans $\mathcal{F}$. Sinon, $S(z) = -e^{-i\theta}$ y est. □

Théorème III.5.3. *Le domaine $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental pour l'opération de Γ sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental, il faut encore montrer qu'il y a un unique élément de chaque orbite dans $\mathcal{F}$. Soient donc τ et $\tau' = \gamma \cdot \tau$. On suppose que tous deux sont dans $\overline{\mathcal{F}}$. On peut aussi (et on le fait) supposer que, par exemple, $\text{Im}\,\tau' \geq \text{Im}\,\tau$ (sinon, on échange τ et τ' et on remplace γ par γ^{-1}).

Comme $\text{Im}\,\tau' = \dfrac{\text{Im}\,\tau}{|c\tau + d|^2}$, on a alors $|c\tau + d| \leq 1$. Mais, comme $|\tau| \geq 1$, on a aussi $c = 0$ ou ± 1.

– Si $c = 0$, on a $|d| \leq 1$ et $d \neq 0$ (puisque $ad - bc = 1$), donc $d = \pm 1$ et $a = d$ (puisque $ad = 1$), donc $\gamma = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ et $\tau' = \tau \pm b$. Comme τ et τ' sont dans $\overline{\mathcal{F}}$, on a $b = \pm 1$ et un seul, de τ et τ' est dans $\mathcal{F}$.

– Si $c = \pm 1$, comme on est dans $PSL(2; \mathbf{Z})$, on peut supposer que $c = 1$. Alors on a $|\tau + d| \leq 1$.

– Si $d = 0$, on a $|\tau| \leq 1$, mais aussi $|\tau| \geq 1$, donc τ est sur le cercle. De plus, $ad - bc = 1$ implique que $b = -1$, donc $\gamma = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau' = a - \dfrac{1}{\tau}$. Si $a = 0$, $\tau' = -\frac{1}{\tau} = S\tau$, et un et un seul des deux est dans $\mathcal{F}$. Si $a \neq 0$, τ' et $-1/\tau$ sont deux points du cercle unité avec $|\mathrm{Ré}\,\tau| \leq 1/2$ qui diffèrent par un entier, donc l'un (disons τ') vaut $e^{2i\pi/3}$ et l'autre (alors, c'est $-1/\tau$) vaut $e^{i\pi/3}$, mais alors $\tau = -e^{-i\pi/3} = \tau'$, ce qui est exclu.

– Si $d \neq 0$, $|\tau + d| \leq 1$ et $|\tau| \geq 1$ obligent encore d à être ± 1 et τ à être $e^{2i\pi/3}$ ou $e^{i\pi/3}$, et on conclut de même.

□

En adaptant cette démonstration, on déduit les stabilisateurs des points de $\mathcal{H}$ sous l'opération de Γ.

Proposition III.5.4. *Soit $\tau \in \mathcal{F}$. Alors, si $\tau \neq i, e^{2i\pi/3}$, le stabilisateur de τ est trivial. Celui de i est $\langle S \rangle$ (et d'ordre 2), celui de $e^{2i\pi/3}$ est $\langle T^{-1}S \rangle$, qui est d'ordre 3.*

Démonstration. Pour $\tau \in \mathcal{F}$, soit γ tel que $\gamma\tau = \tau$. Comme dans la démonstration précédente, on a $|c\tau + d| = 1$, et, comme $|\tau| \geq 1$, on a $c = 0$ ou ± 1.

– Si $c = 0$, $a = \pm 1$, $\gamma\tau = \tau \pm b = \tau$, donc $b = 0$, $d = \pm 1$, donc $\gamma = \pm\,\mathrm{Id}$.

– Si $c = \pm 1$, on peut supposer que $c = 1$ et $|\tau + d| = 1$, donc $|\tau| = 1$, posons $\tau = e^{i\theta}$.

– Si $d = 0$, $b = -1$, $\gamma\tau = a - \frac{1}{\tau} = \tau$, donc $a = \tau + \frac{1}{\tau} = 2\cos\theta$, mais $a \in \mathbf{Z}$, donc $\theta = \pi/2$ ou $2\pi/3$, et $\tau = i$ ou $e^{2i\pi/3}$. Pour $\tau = i$, $a = 0$ et $\gamma = S$, le stabilisateur est bien engendré par S. Si $\tau = e^{2i\pi/3}$, $a = -1$ et $\gamma(z) = -1 - \frac{1}{z}$, soit $\gamma = T^{-1}S$.

– Si $d = \pm 1$, on trouve encore que $\tau = e^{2i\pi/3}$.

Ce que nous voulions démontrer. □

Cette opération sur $\mathcal{H}$ donne des renseignements sur le groupe Γ puisqu'on en déduit

Corollaire III.5.5. *Le groupe modulaire $\Gamma = PSL(2; \mathbf{Z})$ est engendré par S et T.*

Démonstration. On choisit un τ dans l'intérieur de $\mathcal{F}$. Soit $\gamma \in \Gamma$, on considère $\gamma\tau$, il existe un $\delta \in \langle S, T \rangle$ tel que $\delta\gamma\tau \in \mathcal{F}$ (c'est ce que dit la proposition III.5.2) et ce point est à l'intérieur de $\mathcal{F}$, donc c'est τ et l'on a $\delta\gamma\tau = \tau$, ce qui donne $\gamma = \delta^{-1} \in \langle S, T \rangle$ puisque le stabilisateur de τ est trivial. □

III.6. Réseaux et fonctions elliptiques, le retour

À un réseau Λ, on a associé une fonction $\wp$ et des nombres

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 20 b_2 = 60 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^4} \text{ et } g_3 = g_3(\Lambda) = 28 b_4 = 140 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^6},$$

et on a démontré que le polynôme

$$4X^3 - g_2(\Lambda)X - g_3(\Lambda)$$

avait ses trois racines distinctes (exercice III.6), et donc que son discriminant

$$\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27 g_3(\Lambda)^2$$

n'était pas nul. Le but de ce paragraphe est de démontrer une réciproque de ce résultat.

Théorème III.6.1. *Soient g_2 et $g_3 \in \mathbf{C}$ tels que $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$. Il existe un réseau Λ tel que $g_2 = g_2(\Lambda)$ et $g_3 = g_3(\Lambda)$.*

Remarque III.6.2. Les nombres $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$ dépendent vraiment de Λ et pas seulement de sa classe de similitude :

$$g_2(\alpha\Lambda) = \frac{1}{\alpha^4} g_2(\Lambda), \quad g_3(\alpha\Lambda) = \frac{1}{\alpha^6} g_3(\Lambda).$$

De même $\Delta(\alpha\Lambda) = \dfrac{1}{\alpha^{12}} \Delta(\Lambda)$. Par contre, si l'on pose

$$j(\Lambda) = \frac{g_2(\Lambda)^3}{\Delta(\Lambda)},$$

on a $j(\alpha\Lambda) = j(\Lambda)$.

Démonstration du théorème. Donnons donc g_2 et g_3 comme dans l'énoncé, et soit $j = g_2^3/\Delta$.

D'abord, il suffit de trouver un réseau Λ tel que $j(\Lambda) = j$. En effet, si l'on a un tel réseau, multiplions le par un nombre complexe α non nul. L'invariant j ne change pas et Δ est multiplié par α^{-12}. Ainsi $\alpha^{12} = \Delta(\Lambda)/\Delta$ est déterminé et il y a douze valeurs de α, $\alpha = \alpha_0 e^{2ik\pi/12} = \alpha_0 e^{ik\pi/6}$ et

$$(g_2(\alpha\Lambda), g_3(\alpha\Lambda)) = (e^{-2i\pi/3} g_2(\alpha_0\Lambda), e^{-ik\pi} g_3(\alpha_0\Lambda)) = (g_2, g_3)$$

permet de déterminer (au moins une valeur de) k : la première équation détermine k modulo 3 et la deuxième le détermine modulo 2.

Montrons donc qu'un réseau avec le bon j existe. On le cherche de la forme $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$. On écrit les « séries d'Eisenstein » pour ce réseau

$$G_4(\tau) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\Lambda^4}, \quad G_6(\tau) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^6}, \text{ et... } G_\ell(\tau) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^{2k}}.$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut (remarque III.1.3), ces séries convergent absolument pour $\ell \geq 3$. On a donc :

Lemme III.6.3. *Pour $\ell \geq 3$,*

$$G_\ell(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^\ell}$$

définit une fonction holomorphe de $\tau \in \mathcal{H}$. □

Les sommes des séries G_ℓ sont évidemment nulles pour ℓ impair (le réseau étant invariant par $u \mapsto -u$). Les G_{2k} sont des « formes modulaires » (voir les exercices III.21 et III.22), et en particulier, on a (avec des notations que j'espère claires) :

Lemme III.6.4. *Si $\gamma \in \mathrm{SL}(2; \mathbf{Z})$,*

$$G_\ell(\gamma \cdot \tau) = (c\tau + d)^\ell G_\ell(\tau).$$

Démonstration. Avec $\gamma\tau = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$, on calcule

$$\begin{aligned} G_\ell(\tau) &= \sum_{(m,n)} \frac{(c\tau + d)^\ell}{(m(c\tau + d) + n(a\tau + b))^\ell} \\ &= (c\tau + d)^\ell \sum_{(m,n)} \frac{1}{(md + nb + (mc + na)\tau)^\ell} \\ &= (c\tau + d)^\ell \sum_{(m',n')} \frac{1}{(m' + n'\tau)^\ell}, \end{aligned}$$

puisque la matrice du « changement de variables »

$$\begin{pmatrix} n' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

est inversible. □

Pour les nombres g_2, g_3, j, Δ, on a

$$g_2(\gamma\tau) = (c\tau + d)^4 g_2(\tau) \qquad \Delta(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{12} \Delta(\tau)$$

$$g_3(\gamma\tau) = (c\tau + d)^6 g_3(\tau) \qquad j(\gamma\tau) = j(\tau).$$

Les applications $\tau \mapsto \begin{cases} g_2(\tau) \\ g_3(\tau) \\ \Delta(\tau) \\ j(\tau) \end{cases}$ sont holomorphes sur $\mathcal{H}$ et Δ ne s'annule pas. On utilise maintenant son comportement à l'infini :

Proposition III.6.5. *La fonction j est holomorphe sur $\mathcal{H}$, invariante par Γ, et satisfait à*

$$\lim_{\operatorname{Im}\tau \to +\infty} |j(\tau)| = +\infty.$$

Cette proposition sera démontrée plus bas. Elle a pour conséquence la suivante (qui achève la démonstration du théorème) :

Proposition III.6.6. *La fonction $j : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ est surjective.*

Démonstration. Comme j est holomorphe, elle est ouverte, donc $j(\mathcal{H})$ est un ouvert de $\mathbf{C}$. On montre qu'il est aussi fermé (ce qui suffit puisque $\mathbf{C}$ est connexe). Pour cela, soit τ_n une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $\lim j(\tau_n) = b$, on veut montrer que $b \in j(\mathcal{H})$, c'est-à-dire qu'il existe un τ tel que $b = j(\tau)$. Quitte à remplacer des τ_n par des $\gamma_n\tau_n$ (et parce que j est invariant), on peut supposer que $\tau_n \in \overline{\mathcal{F}}$.

Mais la suite des $\operatorname{Im}\tau_n$ est bornée : sinon, elle aurait une sous-suite τ_{n_k} tendant vers $+\infty$, mais alors on aurait $|j(\tau_{n_k})| \to +\infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse que $j(\tau_{n_k}) \to b$.

Donc il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\operatorname{Im}\tau_n \leq M$ pour tout n, la suite τ_n est donc dans un compact, elle a une sous-suite convergente, disons vers $\tau \in \overline{\mathcal{F}}$ et $b = j(\tau)$ par continuité de j. □

□

Il reste à démontrer la proposition III.6.5. Elle-même repose sur un autre proposition :

Proposition III.6.7

$$\lim_{\operatorname{Im}\tau \to +\infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k).$$

Démonstration. Comme les séries G_{2k} sont invariantes pas T, on peut supposer que $|\mathrm{Ré}\,\tau| \leq 1/2$. On se place donc dans $\overline{\mathcal{F}}$ et on remarque que

$$|m\tau + n|^2 = m^2 |\tau|^2 + 2mn\,\mathrm{Ré}(\tau) + n^2 \geq m^2 - mn + n^2 = \left| me^{2i\pi/3} - n \right|^2.$$

La série

$$\sum \frac{1}{\left| me^{2i\pi/3} - n \right|^{2k}}$$

est convergente (parce que $2k \geq 3$ et en application de la remarque III.1.3 pour le réseau hexagonal). Donc la série $G_{2k}(z)$ converge normalement sur $\overline{\mathcal{F}}$ (et donc sur $\mathcal{H}$) vers une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$. De plus, on peut passer à la limite terme à terme et dans

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} = \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m^{2k}} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

les termes avec $n \neq 0$ tendent tous vers 0. □

Démonstration de la proposition III.6.5. On a $j(\tau) = g_2^3(\tau)/\Delta(\tau)$. Lorsque $\operatorname{Im}\tau \to +\infty$, le numérateur tend vers une limite finie non nulle (d'après la proposition III.6). Il suffit donc de montrer que le dénominateur tend vers 0. Mais la même proposition donne (avec les valeurs de $\zeta(4)$ et de $\zeta(6)$, issues par exemple de l'exercice I.13.

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Im}\tau \to +\infty} \Delta(\tau) &= (60 \times 2\zeta(4))^3 - 27(140 \times 2\zeta(6))^2 \\ &= \left(60 \times 2\frac{\pi^4}{90}\right)^3 - 27\left(140 \times 2\frac{\pi^6}{945}\right)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Décisif, non ? □

III.7. Intégrales elliptiques

Il s'agit d'intégrales de la forme
$$\int_a^z \frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$$
où P est un polynôme de degré 3 ou 4. Voir l'exercice III.17 pour l'origine du mot « elliptique » ici (et dans ce chapitre). A priori, cette intégrale dépend, si on veut la définir comme fonction de la variable complexe z, du choix d'un chemin de a à z et du choix d'une détermination de la racine carrée. Mais, en gros, cette formule définit la fonction réciproque d'une fonction elliptique (ici, on devrait s'interroger sur la véracité d'une telle assertion, comment une fonction périodique pourrait-elle avoir une réciproque ?), ce qui est une façon grossière de résumer l'énoncé précis qui suit.

Proposition III.7.1. *Soit P un polynôme de degré 3 ou 4 dont toutes les racines sont simples. Il existe une fonction elliptique f, non constante, telle que, si $U \subset \mathbf{C}$ est un ouvert sur lequel f est inversible, d'inverse $g : f(U) \to U$, alors*
$$g'(w)^2 = \frac{1}{P(w)}.$$

Remarque III.7.2. De tels ouverts U existent, bien entendu. Tout voisinage d'un $a \in \mathbf{C}$ qui n'est pas un pôle de f et qui est tel que $f'(a) \neq 0$ en est un (par le théorème d'inversion locale). Si la proposition est vraie, comme $f'(a) \neq 0$, $P(a) \neq 0$ et il y a une détermination de $\sqrt{P(w)}$ au voisinage de a, pour laquelle on peut écrire
$$g'(w) = \frac{1}{\sqrt{P(w)}}.$$

Démonstration. Si $P(w) = 4w^3 - g_2 w - g_3$ (de degré 3, sans terme en w^2, avec coefficient de w^3 égal à 4), alors (hypothèse de racines simples) nous savons qu'il y a un réseau Λ et une fonction $\wp$ associée à celui-ci. On a alors
$$\wp'(z)^2 = P(\wp(z)) \text{ et } \wp'(z) = \sqrt{P(\wp(z))}$$
pour une détermination de $\sqrt{P(\wp(z))}$. L'application réciproque g sur un ouvert U (comme donné par la remarque) a donc pour dérivée
$$g'(w) = \frac{1}{\wp'(z)} \text{ avec } w = \wp(z), \text{ donc } g'(w) = \frac{1}{\sqrt{P(w)}}.$$

Donc la proposition est démontrée pour tous les polynômes de cette forme. Il s'agit maintenant de se ramener, pour un polynôme de degré 3 ou 4, au degré 3 et à cette forme particulière. On utilise le groupe $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ (des matrices de déterminant 1) ainsi :

Lemme III.7.3. *Soit f est une fonction elliptique associée au polynôme P et g un inverse local de f comme dans l'énoncé de la proposition. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$. Alors les fonctions*
$$\widetilde{f} = \frac{df - b}{-cf + a} \text{ et } \widetilde{g} = g\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right)$$
sont localement inverses l'une de l'autre et
$$\widetilde{g}'(w) = \frac{1}{\sqrt{Q(w)}} \text{ pour le polynôme } Q(w) = (cw+d)^4 P\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right).$$

La démonstration en est une simple vérification, utilisant le fait que
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
Il reste à démontrer que tout polynôme de degré 3 ou 4 à racines simples se ramène ainsi à un $Q(w) = 4w^3 - g_2 w - g_3$.

Si $\deg P = 4$, $P(X) = A(x-a_1)(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)$, les a_i sont distincts, donc l'un, disons a_4 peut-être supposé $\neq 0$. La matrice $\begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 1 & a_4^{-1} \end{pmatrix}$ transforme P en un polynôme de degré 3 (la quatrième racine est partie à l'infini), précisément

$$Q(X) = \left(X + \frac{1}{a_4}\right)^4 A \left(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}} - a_1\right)\left(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}} - a_2\right)\left(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}} - a_3\right)\frac{-1}{X + \frac{1}{a_4}}.$$

Maintenant, P est un polynôme de degré 3, auquel on fait disparaître le terme en X^2 par la méthode habituelle $X \mapsto X + a$, c'est-à-dire ici en appliquant une matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et dont on transforme le coefficient du terme en X^3 en 4 par la méthode tout aussi habituelle $X \mapsto bX$, c'est-à-dire ici en appliquant $\begin{pmatrix} \sqrt{b} & 1 \\ 0 & \sqrt{b}^{-1} \end{pmatrix}$. □

Exercices sur les fonctions elliptiques

***Exercice III.1* (La fonction ϑ).** Soit τ un nombre complexe tel que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ et soit $q = e^{\pi i \tau}$. Montrer que la série

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

On désigne par ϑ la somme de cette série. Montrer que

$$\vartheta(z+1) = \vartheta(z),$$
$$\vartheta(z+\tau) = -q^{-1} e^{-2i\pi z}\vartheta(z).$$

Montrer que ϑ n'est pas identiquement nulle. On pourra montrer par exemple que

$$\int_0^1 |\vartheta(x)|^2 \, dx = 1 + 2\sum_{n\geq 1} |q|^{2n^2}.$$

Montrer que les nombres $m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$ sont des zéros de ϑ. En évaluant l'intégrale de la fonction ϑ'/ϑ sur le contour d'un parallélogramme de périodes bien choisi, montrer que ϑ n'a pas d'autre zéro et que ses zéros sont simples.

***Exercice III.2* (La fonction ϑ (suite)).** On utilise les notations de l'exercice III.1. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n\geq 1}\left(\left(1 - q^{2n-1}e^{2i\pi u}\right)\left(1 - q^{2n-1}e^{-2i\pi u}\right)\right)$$

définit une fonction $f(u)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe u. Quels sont les zéros de f ? Montrer que f/ϑ est doublement périodique et entière. En déduire que

$$f(u) = c \cdot \vartheta(u)$$

où c est une constante.

***Exercice III.3*.** Montrer que si

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots$$

est le développement de Laurent de la fonction $\wp$ à l'origine, l'équation différentielle vérifiée par $\wp$ permet de déterminer par récurrence les coefficients a_{2n} avec $n \geq 3$ comme polynômes en a_2 et a_4. Déterminer effectivement a_6 et a_8.

Exercice III.4. Montrer que la fonction $\wp$ est une solution de l'équation différentielle
$$y'' = 6y^2 - \frac{g_2}{2}.$$

***Exercice III.5* (Zéros et pôles, ordre d'une fonction elliptique)**. On donne un réseau Λ, engendré par u et v. On appelle *parallélogramme de périodes* tout parallélogramme de sommets t, $t+u$, $t+u+v$, $t+v$ (pour $t \in \mathbf{C}$). Soit f une fonction méromorphe bipériodique par rapport à ce réseau, non constante (ce qu'on appelle une *fonction elliptique*[(2)]).

(1) Montrer que f a un nombre fini de pôles dans chaque parallélogramme de période et, de même, qu'elle y a un nombre fini de zéros.

(2) Montrer que la somme des résidus de f en ses pôles d'un même parallélogramme de périodes est nulle.

(3) Soit $c \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = c$ dans un parallélogramme de périodes est indépendant de c. On appelle ce nombre l'*ordre* de la fonction elliptique f. Montrer que l'ordre d'une fonction elliptique est toujours au moins égal à 2. Quel est l'ordre de $\wp$? de $\wp'$?

(4) Soit C le contour bord d'un parallélogramme de périodes (parcouru dans le sens direct) choisi[(3)] tel qu'aucun zéro ni pôle de f ne soit sur C. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} \, dz \in \Lambda.$$
En déduire que la différence entre la somme des zéros et la somme des pôles de f dans un parallélogramme de périodes est un élément du réseau Λ. Combien la fonction $\wp$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes ? Que vaut la somme de ces zéros ?

***Exercice III.6* (Les racines de $4X^3 - g_2X - g_3$)**. Cet exercice est la suite du précédent, dont il utilise les notations et les résultats. On pose
$$\omega_1 = \frac{u}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v}{2}, \quad \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2 \quad \text{et } e_i = \wp(\omega_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$
Montrer que $\wp'(\omega_i) = 0$. Combien $\wp'$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes ? Quels sont ces zéros ?

Montrer que $\wp(z) - e_i$ a un zéro double en $z = \omega_i$. Quels sont les zéros de $\wp(z) - e_i$? Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont trois nombres distincts et que ce sont les trois racines du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ (celles-ci sont donc simples).

***Exercice III.7* (Les fonctions ζ et σ de Weierstrass)**. Montrer que les deux conditions
$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z) \text{ et } \lim_{z\to 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0.$$
définissent une unique fonction ζ, méromorphe, que celle-ci est impaire, et que ses pôles sont les points du réseau, qui sont des pôles simples de résidu 1.

Avec les notations de l'exercice III.6, posons $\eta_i = \zeta(\omega_i)$. Montrer que
$$\begin{cases} \zeta(z+u) = \zeta(z) + 2\eta_1 \\ \zeta(z+v) = \zeta(z) + 2\eta_2 \end{cases}$$
et que $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \dfrac{\pi i}{2}$.

Montrer que les deux conditions
$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) \text{ et } \lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$$

(2) On trouvera de nombreux résultats et exercices sur les fonctions elliptiques, par exemple dans [**14**], une bonne occasion de faire de la publicité pour cet immortel ouvrage.

(3) Cette précaution vaut dès que nécessaire sans qu'elle soit toujours explicitement mentionnée.

définissent une fonction entière σ et que l'on a

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}\right).$$

Montrer que σ a un zéro simple en chaque point de Λ. Exprimer $\sigma(z+u)$ et $\sigma(z+v)$ en fonction de $\sigma(z)$.

Exercice III.8. Soit f une fonction elliptique (c'est-à-dire méromorphe sur $\mathbf{C}$ et bipériodique par rapport à Λ). Montrer qu'on peut écrire

$$f(z) = g_1(z) + g_2(z)\wp'(z)$$

pour g_1 et g_2 des fonctions elliptiques paires. Soit maintenant φ une fonction elliptique paire. On utilise un parallélogramme de périodes C centré en 0. Montrer qu'alors on peut décomposer les zéros non nuls de φ en deux sous-ensembles disjoints

$$\{a_1, \dots, a_m\} \cup \{-a_1, \dots, -a_m\}$$

(on répète les zéros multiples avec leurs multiplicités) et de même ses pôles non nuls en

$$\{b_1, \dots, b_n\} \cup \{-b_1, \dots, -b_n\}.$$

Que peut-on dire de $m - n$?

Montrer que la fonction

$$F(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \frac{\prod_{i=1}^{m}(\wp(z) - \wp(a_i))}{\prod_{i=1}^{n}(\wp(z) - \wp(b_i))}$$

est elliptique et entière.

Montrer que toute fonction elliptique peut s'écrire comme une fraction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$.

***Exercice III.9* (La formule d'addition)**. Cet exercice utilise les notations et les résultats de l'exercice III.5. Soient x et y deux nombres complexes. Montrer que le système linéaire

$$\begin{cases} \wp'(x) = A\wp(x) + B \\ \wp'(y) = A\wp(y) + B \end{cases}$$

détermine uniquement deux nombres complexes A et B (dépendant de x et y) pourvu que $x \not\equiv y$ et $-y \mod \Lambda$. Montrer qu'alors, la fonction

$$z \longmapsto \wp'(z) - A\wp(z) - B$$

a exactement trois zéros dans un parallélogramme de périodes et que ceux-ci sont congruents à x, y et $-x-y$ modulo Λ. On a donc

$$\wp'(-x-y) = A\wp(-x-y) + B.$$

En éliminant A et B, montrer que

$$\begin{vmatrix} \wp(x) & \wp'(x) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(x+y) & -\wp'(x+y) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

***Exercice III.10* (La formule d'addition, suite)**. On utilise les notations de l'exercice III.9. Les valeurs de z pour lesquelles la fonction $\wp'(z) - A\wp(z) - B$ s'annule sont x, y et $-x-y$ (modulo Λ). Montrer que

$$4\wp^3(z) - A^2\wp^2(z) - (2AB + g_2)\wp(z) - (B^2 + g_3)$$

s'annule quand $\wp(z) = \wp(x)$, $\wp(y)$ ou $\wp(x+y)$. En déduire que, pour x et y tels que $\wp(x)$, $\wp(y)$ et $\wp(x+y)$ sont distincts, ces trois nombres sont les racines du polynôme

$$4X^3 - A^2X^2 - (2AB + g_2)X - (B^2 + g_3)$$

et donc que

$$\wp(x) + \wp(y) + \wp(x+y) = \frac{1}{4}A^2.$$

Montrer finalement la formule d'addition sous la forme
$$\wp(x+y) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right\}^2 - \wp(x) - \wp(y).$$

***Exercice III.11* (La formule de duplication)**. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\wp'(x)-\wp'(x+h)}{\wp(x)-\wp(x+h)} = \frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}.$$
Déduire de la formule d'addition (exercice III.10) la formule de duplication
$$\wp(2x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}\right\}^2 - 2\wp(x).$$

***Exercice III.12* (Loi de groupe sur une cubique)**. Soit $\mathbf{K}$ un des trois corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (que l'on considérera comme un sous-corps de $\mathbf{C}$ lorsque ce sera nécessaire) et soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 3 sans racine multiple. On considère la courbe
$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbf{K}^2 \mid y^2 = P(x)\right\}.$$

Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ (non symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des x). Montrer que la droite AB (la tangente à $\mathcal{C}$ en A si $A=B$) coupe $\mathcal{C}$ en un troisième point C'. On appelle C le symétrique[(4)] de C' par rapport à l'axe des $\mathcal{C}$ et on pose
$$A+B=C.$$
Pour prolonger cette loi en une loi de composition interne sur $\mathcal{C}$, on convient d'ajouter un unique point « à l'infini » à $\mathcal{C}$, qui est aussi sur toutes les droites parallèles à l'axe des y. On note ce point 0.

Montrer que $+$ est une loi de composition interne sur $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{0\}$, qu'elle est commutative, possède un élément neutre et que tout élément possède un inverse. Remarquer aussi que l'on a
$$A+B+C=0 \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

En admettant que $+$ est aussi associative, on a ainsi une loi de groupe commutative sur la « cubique » $\widetilde{\mathcal{C}}$. Déterminer les éléments d'ordre 2, d'ordre 3.

On considère maintenant $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$ et on suppose que
$$P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$$
est le polynôme associé à un réseau Λ de $\mathbf{C}$. Ainsi on a une application
$$(\wp, \wp') : \mathbf{C} - \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$$
que l'on prolonge en envoyant les points de Λ sur le point $0 \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Montrer qu'on a ainsi défini une bijection
$$\Phi : \mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}.$$
En utilisant les formules d'addition (exercice III.9), montrer que
$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$
En déduire que la loi $+$ définie sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ est associative.

Question subsidiaire. Combien y a-t-il de points d'inflexion sur $\widetilde{\mathcal{C}}$?

***Exercice III.13* (La fonction $\wp$ comme fonction de variable réelle)**. Montrer que le réseau Λ engendré par 1 et τ (avec $\operatorname{Im}\tau > 0$) est invariant par conjugaison complexe si et seulement si $\text{Ré}\,\tau \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Vérifier qu'alors le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ est réel et déterminer, suivant que $\text{Ré}\,\tau \in \mathbf{Z}$ ou pas, le nombre de racines réelles de ce polynôme. Dessiner le graphe de la fonction $t \mapsto \wp(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et, si $\text{Ré}\,\tau \in \mathbf{Z}$, celui de $t \mapsto \wp(\frac{\tau}{2}+t)$.

(4) On est prié de faire une figure dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Exercice III.14. Soit $\Lambda \subset \mathbf{C}$ un réseau. On appelle g_2 et g_3 les constantes et $\wp$ la fonction de Weierstrass associées à Λ. On suppose que f est une fonction méromorphe sur un ouvert connexe non vide de $\mathbf{C}$ et qu'elle satisfait à la relation

$$f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3.$$

(1) Montrer qu'il existe un ouvert non vide U de $\mathbf{C}$ tel que, sur l'ouvert U, f est inversible $U \to f(U)$. On appelle $g : f(U) \to U$ son inverse.

(2) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbf{C} - \Lambda$ tel que $\wp(V) \subset U$. On considère la fonction $h = g \circ \wp$, définie sur V. Montrer que $h'(z)^2 = 1$ pour tout $z \in V$.

(3) Déterminer h et montrer qu'il existe un nombre complexe a tel que l'on ait $f(z) = \wp(z \pm a)$ pour tout z tel que le membre de droite soit défini.

Exercice III.15. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré 3 ou 4 dont toutes les racines (réelles ou complexes) sont simples et dont on suppose le coefficient du terme de plus haut degré positif (de sorte que $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$). Pour $x > a$ assez grand, on a donc $P(x) > 0$. Montrer que l'intégrale

$$E(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \text{ (pour } x > a)$$

est absolument convergente, et que, sur un intervalle convenable, elle possède une application réciproque f.

Montrer que f se prolonge en une fonction méromorphe et doublement périodique sur $\mathbf{C}$.

Exercice III.16. Montrer que la fonction

$$E(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$. Soit f son application réciproque. Montrer que f se prolonge en une fonction méromorphe et doublement périodique sur $\mathbf{C}$.

On considère la courbe plane décrite en coordonnées polaires par l'équation $r^2 = \cos(2\theta)$. Dessiner cette courbe (lemniscate de Bernoulli). En utilisant la formule

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)^2$$

pour la longueur d'arc en coordonnées polaires, montrer que

$$s = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}.$$

De la formule de duplication (exercice III.11), déduire la formule de Fagnano (duplication de l'arc de lemniscate)[(5)]

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} \text{ pour } y = \frac{2x\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^4}.$$

***Exercice III.17* (Étymologique)**. On considère l'ellipse paramétrée par

$$(x = a\cos\theta, y = b\sin\theta) \text{ pour } a, b > 0.$$

Montrer que la longueur d'arc en est donnée par une intégrale[(6)]

$$\int \frac{1 - k^2 u^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}\, du.$$

[(5)] Cette formule montre que l'on peut « dupliquer » un arc de lemniscate à la règle et au compas.

[(6)] « elliptique », donc

Exercices sur le demi-plan de Poincaré, le groupe modulaire

Exercice III.18. Déterminer un domaine fondamental pour l'opération du groupe $\mathbf{Z}^2$ des translations entières sur le plan $\mathbf{R}^2$.

Exercice III.19. Si x_1, x_2, x_3 sont les racines du polynôme $4X^3 - pX - q$, montrer l'égalité
$$((x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1))^2 = p^3 - 27q^2.$$

Exercice III.20. Déterminer l'invariant j pour le réseau « carré » des entiers de Gauss, pour le réseau « hexagonal » engendré par 1 et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice III.21. Pour $\ell \in \mathbf{N}$, on appelle fonction pré-modulaire de poids ℓ une fonction méromorphe f sur $\mathcal{H}$ qui satisfait à
$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^\ell f(z) \text{ pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et tout } z \in \mathcal{H}.$$
Montrer que toute fonction pré-modulaire est invariante par T.

Montrer que, si ℓ est impair, alors $f = 0$. On pose donc $\ell = 2k$.

Montrer que f est pré-modulaire de poids $2k$ si et seulement si la différentielle $f(z)d(z^k)$ est invariante sous l'opération de Γ.

Montrer que la valuation de f en z ne dépend que l'orbite de z sous Γ, en d'autres termes que,
$$\text{pour tout } \gamma \in \Gamma, v_{\gamma \cdot z}(f) = v_z(f).$$

Exercice III.22. Montrer que toute fonction pré-modulaire peut s'écrire
$$f(z) = \widetilde{f}(q), \text{ où } q = e^{2i\pi z}.$$

Quelle est la limite de q quand la partie imaginaire de z tend vers l'infini ? Montrer que
$$\{z \in \mathcal{H} \mid q < a\} = \left\{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Im}(z) > \frac{\ln(1/a)}{2\pi}\right\}.$$

On dit que la fonction pré-modulaire f de poids $2k$ est modulaire de poids $2k$ si la fonction $\widetilde{f}$ est une fonction méromorphe de q en $q = 0$. Montrer que c'est le cas si et seulement si il existe un entier $N \in \mathbf{Z}$ tel que
$$f(z) = O(\left|e^{-2i\pi z N}\right|) \text{ quand } \operatorname{Im}(z) \to +\infty.$$
Montrer qu'alors
$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n \geq N} a_n q^n \text{ avec } a_n \neq 0.$$

On dit qu'une fonction modulaire de poids $2k$ est une forme modulaire de poids $2k$ si elle est holomorphe partout (y compris à l'infini, c'est-à-dire que $N \geq 0$).

Montrer que les séries d'Eisenstein $G_{2k}(\tau)$ associées aux réseaux $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$ sont des formes modulaires de poids $2k$. Qu'en est-il de $\Delta(\tau)$? de $j(\tau)$?

CHAPITRE IV

APPENDICE, LES PRODUITS INFINIS

IV.1. Produits infinis de nombre complexes

À une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes, on associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $p_n = \prod_{i=0}^{n} p_i$. Si la suite (p_n) converge on dit que le produit infini est convergent. Le lemme suivant est très utile.

Lemme IV.1.1. *Soient $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ des nombres complexes. On a*

$$\prod_{i=0}^{n}(1+|a_i|) \leq \exp\left(\sum_{i=0}^{n}|a_i|\right) \quad et \quad \left|\prod_{i=0}^{n}(1+a_i)-1\right| \leq \prod_{i=0}^{n}(1+|a_i|)-1.$$

Démonstration. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$. On a $1+x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, d'où la première inégalité :

$$\prod_{i=0}^{n}(1+|a_i|) \leq \prod e^{|a_i|} = e^{\sum a_i}.$$

Pour la deuxième,

$$\prod_{i=0}^{n}(1+a_i)-1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i_1}\cdots a_{i_k}$$

et idem pour $\prod(1+|a_i|)-1$ avec les modules des a_i, plus l'inégalité triangulaire. □

Proposition IV.1.2

(1) *Si les a_n sont des réels positifs, alors le produit $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.*

(2) *Si $a_n \in [0,1[$, le produit infini $\prod(1-a_n)$ converge. On a $\prod(1-a_n) \neq 0$ si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.*

(3) *Pour des a_n complexes, si la série $\sum|a_n|$ converge, alors $\prod(1+a_n)$ converge vers P. De plus $P=0$ si et seulement si l'un des a_n vaut -1. Enfin, pour toute permutation $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, on a $P = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+a_{\sigma(n)})$.*

Autrement dit (dernière assertion), dans cette hypothèse de convergence absolue, on peut permuter les facteurs comme on veut sans changer le résultat du calcul.

Démonstration. D'abord, avec des réels positifs, le produit des $1+a_n$ converge si et seulement si la suite des produits partiels est bornée (c'est une suite croissante). De même la série des a_n est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Mais on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)$$

(la première inégalité en développant le produit, la deuxième comme dans le lemme), donc les deux propriétés sont équivalentes.

Pour la deuxième assertion, $a_n \in [0,1[$, donc

$$\text{la suite} \left(\prod_{n=0}^{N}(1-a_n)\right)_{N\in\mathbf{N}} \quad \text{est à termes } \geq 0,$$

de plus elle est décroissante ($1 - a_{N+1} < 1$), donc elle est convergente. Dire que le produit n'est pas nul, c'est dire que le produit des inverses $\prod(1-a_n)^{-1}$ est convergent lui aussi. On écrit

$$(1-a_n)^{-1} = 1 + b_n \text{ avec } b_n = \frac{1}{1-a_n} - 1 = \frac{a_n}{1-a_n} = a_n(1-a_n)^{-1}, \text{ donc } b_n \geq 0 \text{ et } b_n = a_n + o(a_n)$$

donc la série des b_n est convergente si et seulement si celle des a_n l'est (en appliquant la première assertion à la suite b_n).

Maintenant les a_n sont complexes et on suppose que la série (à termes positifs) $\sum |a_n|$ converge. On a

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\right| &= \left|\prod_{n=0}^{N}(1+a_n) - 1 + 1\right| \\
&\leq \left|\prod_{n=0}^{N}(1+a_n) - 1\right| + 1 \\
&\leq \prod_{n=0}^{N}(1+|a_n| - 1 + 1 \text{ d'après le lemme} \\
&\leq \exp\left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|\right) \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\right).
\end{aligned}$$

Appelons C cette dernière borne. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, et soit N_0 tel que le reste $\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|a_n| < \varepsilon$. Soit σ une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. On suppose que $N \geq N_0$ et que M est assez grand pour que

$$\{0, \ldots, N\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(M)\} \text{ en particulier } M \geq N \geq N_0.$$

Alors

$$\prod_{n=0}^{M}(1+a_{\sigma(n)}) - \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\left[\prod(1+a_n) - 1\right]$$

(où le produit dans le crochet porte sur les entiers n dans le complémentaire de $\{0, \ldots, N\}$ dans $\{\sigma(0), \ldots, \sigma(M)\}$, qui sont tous $\geq N_0$. Donc ce produit entre crochets est

$$\leq \prod(1+|a_n|) - 1 \leq \exp\left(\sum |a_n|\right) - 1 \leq e^{\varepsilon} - 1 \leq 2\varepsilon.$$

On a donc

$$\left|\prod_{n=0}^{M}(1+a_{\sigma(n)}) - \prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\right| \leq 2\varepsilon \left|\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\right| \leq 2C\varepsilon.$$

Cette inégalité, appliquée à $\sigma = \mathrm{Id}$, dit simplement que la suite $(\prod_{n=0}^{N}(1+a_n))$ est de Cauchy. Donc elle converge. On a de plus, pour $M \geq N_0$,

$$-\left|\prod_{n=0}^{M}(1+a_n)\right| + \left|\prod_{n=0}^{N_0}(1+a_n)\right| \leq \left|\prod_{n=0}^{M}(1+a_n) - \prod_{n=0}^{N_0}(1+a_n)\right| \leq 2\varepsilon \left|\prod_{n=0}^{N_0}(1+a_n)\right|$$

de sorte que

$$\left|\prod_{n=0}^{M}(1+a_n)\right| \geq (1-2\varepsilon)\left|\prod_{n=0}^{N_0}(1+a_n)\right|$$

donc, en passant à la limite, le produit infini ne peut s'annuler que si l'un des a_n vaut -1.

En revenant à un σ quelconque et en appliquant le résultat à la suite $a_{\sigma(n)}$, on voit que la suite $\left(\left|\prod_{n=0}^{M}(1+a_{\sigma(n)})\right|\right)_{M\in\mathbf{N}}$ converge, et qu'elle converge vers la même limite. □

IV.2. Produits infinis de fonctions

On remplace le nombre a_n par la fonction $a_n(z)$. La démonstration précédente montre que, si la convergence de $\sum |a_n|$ est uniforme en z, alors celle de $\prod(1+a_n)$ l'est aussi.

Proposition IV.2.1. *Soit $a_n : E \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions telle que la série $\sum |a_n|$ converge uniformément sur E. Alors le produit infini*

$$f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+a_n(z))$$

converge uniformément sur E.

Ceci sur n'importe quel espace topologique E. En ajoutant à ce résultat ce que nous savons des fonctions holomorphes, on en déduit en particulier :

Théorème IV.2.2. *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe non vide et soit $u_n : U \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions holomorphes dont aucune n'est identiquement égale à -1. On suppose que la série $\sum u_n$ converge normalement sur les compacts de U. Alors le produit infini*

$$f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n(z))$$

converge uniformément sur les compacts de U et y définit une fonction f qui y est holomorphe. Cette fonction n'est pas identiquement nulle et on a, pour $z \in U$,

$$v_z(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_z(1+u_k).$$

Démonstration. Seule l'assertion sur les valuations (dans laquelle, on l'a noté, la somme de droite est finie) reste à démontrer. Soit donc un point $z \in U$ et soit V un voisinage ouvert relativement compact de z dans U. La convergence de la série implique qu'il existe un entier N tel que

$$\forall\, w \in V, \qquad \sum_{k=N+1}^{+\infty} |u_k(w)| < 1.$$

Pour $k \geq N+1$, la fonction $1+u_k$ ne s'annule donc pas sur V. La fonction f_N définie par

$$f_N(w) = \prod_{n=N+1}^{+\infty}(1+u_n(w))$$

qui est holomorphe sur W (première partie du théorème) ne s'y annule donc pas, et

$$f = \left(\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)\right) f_N$$

n'est pas identiquement nulle et

$$v_z(f) = v_z\left(\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)\right) = v_z\left(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\right) = \sum_{n=0}^{N} v_z(1+u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_z(1+u_n)$$

ce que nous voulions démontrer. □

Proposition IV.2.3. *Si les u_n sont holomorphes sur U et si le produit infini converge sur les compacts de U, alors la série de fonctions méromorphes $\sum \dfrac{u_n'}{1+u_n}$ converge normalement sur les compacts de U vers la dérivée logarithmique f'/f du produit infini.*

Démonstration. Pour un entier n fixé et pour tout entier m, posons $v_m(z) = \prod_{k=n+1}^{m}(1+u_k(z))$. On a

$$\frac{v_m'(z)}{v_m(z)} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{u_k'(z)}{(1+u_k(z))}.$$

Donc
$$v_m'(z) = v_m(z) \sum_{k=n+1}^{m} \frac{u_k'(z)}{1+u_k(z)}.$$
Maintenant, m tend vers l'infini. la limite v des v_m est holomorphe et sa dérivée v' est la limite des v_m'. Ensuite
$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j'}{1+u_j} + \frac{v'}{v}, \text{ etc.}$$
□

IV.3. Exemple, développement de la fonction sinus

L'exemple le plus simple de produit infini que l'on puisse imaginer est celui du produit infini
$$f(z) = z \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$
En effet, ce produit converge normalement sur tous les compacts puisque la série numérique $\sum 1/n^2$ est convergente. En application des résultats précédents, la fonction f est entière et elle a pour zéros (simples) toutes les valeurs entières de z.

On calcule sa dérivée logarithmique :
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$
Nous avons déjà remarqué (exercice I.11) l'identité
$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$
On a alors, en posant $g(z) = \sin(\pi z)$, les égalités
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Donc $f(z) = C \sin \pi z$ et il ne reste plus qu'à déterminer la constante C. Par définition de f, on a
$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1.$$
Comme $\sin \pi z/z$ tend vers π, on en déduit que $C = \dfrac{1}{\pi}$. En conclusion, on a obtenu la formule :

Proposition IV.3.1

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$
□

Exercices

Exercice IV.1 **(Produits infinis)**. Dire si les produits infinis suivants sont convergents et donner éventuellement leur valeur :

(1) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

(4) $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n^3+1}\right)$

(5) $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + z^{2^n}\right)$ (selon les valeurs de $z \in \mathbf{C}$).

CHAPITRE V

NOTES SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET

Il y a une infinité de nombres premiers (voir au besoin la remarque page 13). Comment ces nombres premiers sont répartis dans l'ensemble des nombres entiers est une question délicate qui fait (et a fait) l'objet de nombreuses conjectures, de nombreux théorèmes. Un des outils essentiels est la « fonction zêta de Riemann », l'exemple le plus célèbre de série de Dirichlet.

À ces séries, à la fonction ζ (zêta) et à deux théorèmes puissants sur les nombres premiers, est consacré ce chapitre.

Une série de Dirichlet est une série de fonctions de la forme[1]

$$\sum_{n\geq 1} a_n n^{-z}.$$

La fonction ζ de Riemann est la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1} n^{-z}$$

(obtenue lorsque tous les a_n sont égaux à 1).

V.1. Demi-plans de convergence

De même qu'une série entière a un disque de convergence, une série de Dirichlet a un demi-plan de convergence. Voici un résultat précis.

Proposition V.1.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n n^{-z_0}$ soit convergente.*

(2) *Il existe un nombre réel α tel que, pour $n \to +\infty$, $a_n = O(n^\alpha)$.*

(3) *Il existe un nombre réel positif ρ tel que la série $\sum a_n n^{-z}$ converge normalement sur le demi-plan* $\text{Ré}(z) \geq \rho$.

Démonstration. Si (1) est vrai, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|a_n n^{-z_0}\right| = 0,$$

donc, pour $n \to +\infty$, $a_n = O(n^{\text{Ré}\, z_0})$ et donc (2) est vrai avec $\alpha = \text{Ré}\, z_0$.

Si (2) est vrai, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\text{Ré}(z) > \alpha + 1$, on a

$$\left|a_n n^{-z}\right| = |a_n|\, n^{-\text{Ré}\, z} = O(n^{\alpha - \text{Ré}\, z})$$

(avec un exposant < -1), donc la série converge et on a (3).

Comme (3) implique clairement (1), la démonstration est terminée. □

Remarque V.1.2. Si la série de Dirichlet converge absolument en $z = z_0$, alors elle converge normalement sur les demi-plan $\text{Ré}\, z \geq \text{Ré}\, z_0$, puisqu'on a, pour z dans ce demi-plan

$$\left|a_n n^{-z}\right| \leq \left|a_n n^{-z_0}\right|.$$

[1] Voir une généralisation dans les exercices V.9 et V.10.

On définit des « abscisses de convergence » :

$$\sigma = \inf\left\{\mathrm{Ré}\, z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } \sum a_n n^{-z} \text{ converge}\right\}$$
$$\sigma_{\mathrm{abs}} = \inf\left\{\mathrm{Ré}\, z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } \sum a_n n^{-z} \text{ converge absolument}\right\}$$
$$\tau = \inf\left\{\alpha \in \mathbf{R} \mid a_n = O(n^\alpha)\right\}.$$

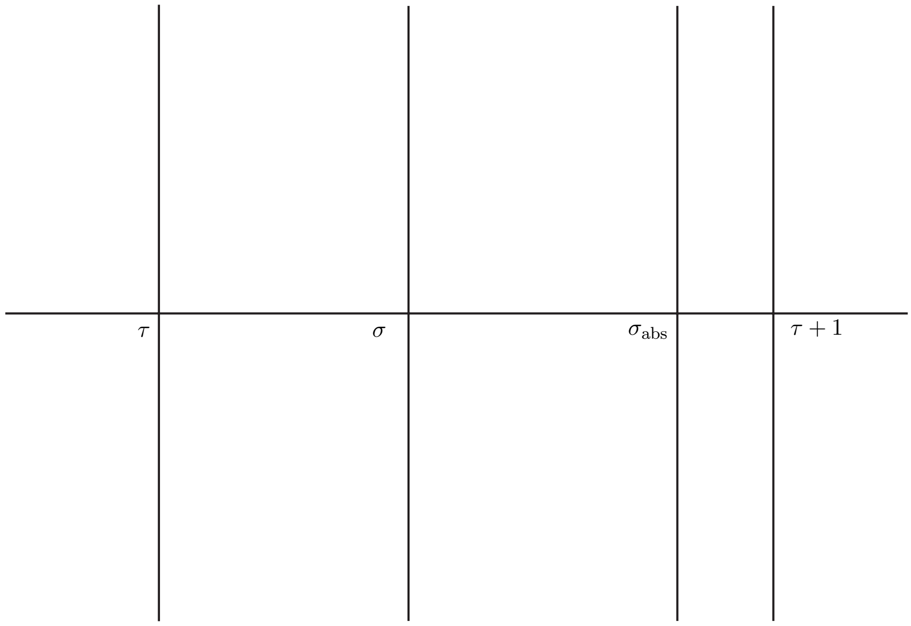


FIGURE 1. Abscisses de convergence

On a

$$\tau \leq \sigma \leq \sigma_{\mathrm{abs}} \leq \tau + 1$$

(la proposition affirme que si l'un est fini, les autres le sont aussi). On a aussi

$$\tau = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln |a_n|}{\ln n}.$$

Remarque V.1.3. Si les coefficients a_n de la série de Dirichlet sont réels et positifs, alors $\sigma = \sigma_{\mathrm{abs}}$.

Remarquons encore que, si $\rho > \sigma_{\mathrm{abs}}$, la série converge normalement sur le demi-plan $\mathrm{Ré}(z) \geq \rho$, de sorte que la somme est une fonction holomorphe sur $\mathrm{Ré}\, z > \sigma_{\mathrm{abs}}$. On a beaucoup mieux, c'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition V.1.4. *S'il existe un nombre complexe z_0 tel que les sommes partielles*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-z_0}$$

de la série en z_0 soient bornées, la série de Dirichlet converge uniformément sur les compacts du demi-plan $\mathrm{Ré}\, z > \mathrm{Ré}\, z_0$.

L'hypothèse est satisfaite, en particulier, quand la série numérique en z_0 converge. La conclusion implique que la somme de la série est holomorphe sur le demi-plan en question.

Corollaire V.1.5. *Soit C l'ensemble des z en lesquels la série converge. On a*

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}\, z > \sigma\} \subset C \subset \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}\, z \geq \sigma\}$$

et la série converge uniformément sur les compacts du demi-plan ouvert

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}\, z > \sigma\}$$

(et y définit une fonction holomorphe).

Remarque V.1.6. Si on appelle $D(z)$ la somme, les dérivées de cette fonction se calculent terme à terme et l'on a

$$D^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(-\ln n)^k n^{-z}.$$

Démonstration de la proposition V.1.4. Posons

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-z_0} \text{ et } M = \sup_{N\geq 1} |A_N|$$

(l'hypothèse est que M est fini). Soient p et $q \in \mathbf{N}$ avec $1 < p < q$ et soit $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n n^{-z} &= \sum_{n=p}^{q}(A_n - A_{n-1})n^{-z+z_0} \\
&= \sum_{n=p}^{q} A_n n^{-z+z_0} - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n(n+1)^{-z+z_0} \\
&= A_q q^{-z+z_0} - A_{p-1}p^{-z+z_0} + \sum_{n=p}^{q-1} A_n \left[n^{-z+z_0} - (n+1)^{-z+z_0}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n n^{-z}\right| \leq M\left(\left|q^{-z+z_0}\right| + \left|p^{-z+z_0}\right| + \sum_{n=p}^{q-1}\left|n^{-z+z_0} - (n+1)^{-z+z_0}\right|\right).$$

On utilise ensuite le lemme facile suivant (dont la démonstration figure plus bas).

Lemme V.1.7. *Soient α, $\beta \in \mathbf{R}$ avec $\alpha \leq \beta$, et soit $z \in \mathbf{C}$ avec $x = \mathrm{R\acute{e}}\, z > 0$. On a*

$$\left|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right| \leq \frac{|z|}{x}(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}).$$

On l'applique ici à $\alpha = \ln n$ et $\beta = \ln(n+1)$. La majoration précédente se continue en

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n n^{-z}\right| &\leq M\left(q^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + \sum_{n=p}^{q-1}\frac{|z-z_0|}{\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\left(e^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)\ln n} - e^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)\ln(n+1)}\right)\right) \\
&\leq M\left(q^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + \frac{|z-z_0|}{\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\sum_{n=p}^{q-1}\left(n^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} - (n+1)^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\right)\right) \\
&\leq M\frac{|z-z_0|}{\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\left(q^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + \sum_{n=p}^{q-1}\left(n^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} - (n+1)^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\right)\right) \\
&\quad (\text{puisque } |z-z_0| / \mathrm{R\acute{e}}(z-z_0) \geq 1).
\end{aligned}$$

Ensuite, la somme dans la parenthèse vaut

$$\begin{aligned}
q^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} &+ p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} - \cdots + (q-1)^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} - q^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} \\
&= 2p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} + (q-1)^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)} \leq 3p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}
\end{aligned}$$

(puisque $q > p$). Finalement :

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n n^{-z}\right| \leq \frac{3M\,|z-z_0|}{\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}\, p^{-\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0)}$$

qui est uniformément borné sur les compacts de $\mathrm{R\acute{e}}(z-z_0) > 0$. On a le résultat voulu par le critère de Cauchy. $\square$

Démonstration du lemme. Elle est directe : on écrit

$$z\int_\alpha^\beta e^{-tz}\,dt = z\frac{e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}}{z} = e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}$$

et on prend les modules

$$\left|e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right| = |z|\left|\int_\alpha^\beta e^{-tz}\,dt\right| \leq |z|\int_\alpha^\beta e^{-tx}\,dt = \frac{|z|}{x}(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}).$$

□

V.2. Développement asymptotique

On montre que la série de Dirichlet est un développement asymptotique de sa somme lorsque $\mathrm{Ré}\, z \to +\infty$. On considère

$$D(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-z}$$

dont on suppose quelle converge quelque part (et donc sur un demi-plan). Soit n_0 le plus petit n tel que $a_n \neq 0$. Soit $\rho \in \mathbf{R}$ tel que D converge en $z=\rho$ (et donc aussi pour $\mathrm{Ré}(z) \geq \rho$). On a

$$D(z) - a_{n_0}n_0^{-z} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n n^{-z}$$

et, en modules,

$$\left|D(z) - a_{n_0}n_0^{-z}\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |a_n|\, n^{-\mathrm{Ré}\, z} = n_0^{-\mathrm{Ré}\, z}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\mathrm{Ré}\, z}.$$

Pour $n \geq n_0+1$ et $\mathrm{Ré}\, z \geq \rho$, on a $(n_0/n)^{\mathrm{Ré}\, z} \leq (n_0/n)^\rho$. De plus, puisque la série $n_0^\rho \sum |a_n|\, n^{-\rho}$ est convergente, on a

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{n_0}{n}\right)^\rho < +\infty, \text{ de sorte que } \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\mathrm{Ré}\, z} \text{ est normalement convergente pour } \mathrm{Ré}\, z \geq \rho.$$

Donc on a

$$\lim_{\mathrm{Ré}\, z\to+\infty}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|a_n|\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\mathrm{Ré}\, z} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\lim_{\mathrm{Ré}\, z\to+\infty}|a_n|\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\mathrm{Ré}\, z} = 0.$$

On a ainsi montré que, pour $\mathrm{Ré}\, z \to +\infty$,

$$\left|D(z) - a_{n_0}n_0^{-\mathrm{Ré}\, z}\right| \leq n_0^{-\mathrm{Ré}\, z} \times \text{ terme tendant vers } 0,$$

c'est-à-dire :

Proposition V.2.1. *Lorsque* $\mathrm{Ré}\, z \to +\infty$,

$$D(z) = a_{n_0}n_0^{-z} + O(n_0^{-\mathrm{Ré}\, z}).$$

Remarque V.2.2. ... en particulier, la somme $D(z)$ n'est pas nulle !

Et on a immédiatement par récurrence en considérant $D(z) - a_{n_0}n_0^{-\mathrm{Ré}\, z}$ et ainsi de suite :

Corollaire V.2.3. *Lorsque* $\mathrm{Ré}\, z \to +\infty$,

$$D(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-z} + O(N^{-\mathrm{Ré}\, z}).$$

Les sommes partielles d'une série de Dirichlet en forment un développement asymptotique pour $\mathrm{Ré}\, z \to +\infty$.

V.3. Séries de Dirichlet à coefficients périodiques

On suppose dans ce paragraphe que les coefficients de la série sont périodiques, c'est-à-dire qu'il existe un N (la période) tel que $a_{n+N} = a_n$ pour tout n. Ceci inclut notamment le cas où tous les a_n sont égaux (avec $N = 1$), c'est-à-dire le cas de la fonction ζ de Riemann, et les séries de Dirichlet associés à des caractères modulo N (sur lesquelles porteront certains des développements de ces notes).

Dans ce cas, on peut considérer la suite (a_n) comme une application

$$a : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

***Remarque V.3.1* (Sur les abscisses de convergence)**. On a alors

$$\{\alpha \in \mathbf{R} \mid a_n = O(n^\alpha)\} = [0, +\infty[$$

donc $\tau = 0$. De plus, avec $A = \max |a_n|$ et

$$\sum |a_n|\, n^{-\operatorname{Ré} z} \leq A \sum n^{-\operatorname{Ré} z},$$

on voit que

$$\inf \Big\{ \operatorname{Ré} z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } \sum a_n n^{-z} \text{ converge absolument} \Big\} = 1.$$

Donc

$$0 = \tau \leq \sigma \leq \sigma_{\text{abs}} = 1 \leq \tau + 1$$

implique que $\sigma \in [0, 1]$. Où est-il exactement ? C'est ce à quoi répond la proposition suivante.

Proposition V.3.2

(1) *Si la somme* $\sum_{n=1}^{N} a_n$ *sur une période est nulle, alors* $\sigma = 0$. *Sinon* $\sigma = 1$.

(2) *La fonction*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-z} - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \right) \frac{1}{z-1}$$

qui est définie et holomorphe sur $\operatorname{Ré} z > 1$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\operatorname{Ré} z > 0$.

Spécifions le cas de la fonction ζ dans un corollaire (en réalité, la démonstration de ce corollaire est une des étapes de la démonstration de la proposition, comme on va le voir).

***Corollaire V.3.3* (La fonction ζ de Riemann)**. *La fonction*

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\operatorname{Ré} z > 0$.

Remarque V.3.4. En réalité ces fonctions se prolongent à des fonctions entières, mais c'est plus difficile et ce sera démontré plus bas.

Démonstration de la proposition

– Si la somme sur une période est nulle, les sommes partielles $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ sont périodiques et donc bornées. On peut appliquer la proposition V.1.4 avec $z_0 = 0$, et elle donne $\sigma \leq \operatorname{Ré} z_0 = 0$, donc $\sigma = 0$.

– On étudie maintenant le cas particulier où la somme n'est pas nulle et où $a_n = 1$ pour tout n (c'est le cas, envisagé par le corollaire, de la fonction ζ). Pour tout entier $M \geq 2$, on définit

$$D_M(z) = (1 - M^{1-z})\zeta(z).$$

Comme chacun de ses facteurs est défini et holomorphe pour $\operatorname{Ré} z > 1$, il en est de même de la fonction D_M. Pour $\operatorname{Ré} z > 1$, on a

$$\begin{aligned} D_M(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z} - M \sum_{n=1}^{+\infty} (Mn)^{-z} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n^{-z} \end{aligned}$$

avec

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } M \text{ ne divise pas } n \\ 1 - M & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc... $D_M(z)$ est la somme d'une série de Dirichlet dont les coefficients sont périodiques de période M et la somme des coefficients sur une période est nulle. On peut lui appliquer la première partie de la proposition, elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\text{Ré}\, z > 0$. Mais $D_M(z) = (1 - M^{1-z})\zeta(z)$ et le premier facteur est une fonction entière. Ses zéros sont les solutions de $M^{1-z} = 1$, c'est-à-dire les éléments de

$$P_M = \left\{1 + \frac{2ik\pi}{\ln M}, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Donc $\zeta(z) = D_M(z)/(1 - M^{1-z})$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\text{Ré}\, z > 0$, avec au pire des pôles simples en les points de P_M. Il ne reste plus qu'à faire varier M. Si M_1 et M_2 sont premiers entre eux, on a

$$\mathbf{Z}/(\ln M_1)\mathbf{Z} \cap \mathbf{Z}/(\ln M_2)\mathbf{Z} = \{0\}.$$

En effet

$$\frac{m}{\ln M_1} = \frac{n}{\ln M_2} \Rightarrow m \ln M_2 = n \ln M_1 \Rightarrow M_2^m = M_1^n \Rightarrow m = n = 0.$$

Donc ζ a, au pire, un pôle simple, en 1. Pour vérifier qu'elle a bien un pôle, on calcule tout simplement le résidu (dont on a d'ailleurs annoncé qu'il devait être égal à 1, il faut donc le calculer !), par exemple avec $M = 2$, en appliquant

$$\text{rés}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

à $f = D_2$, $g(z) = 1 - 2^{1-z}$ et $z = 1$,

$$\text{rés}\left(\frac{D_2(z)}{1 - 2^{1-z}}, 1\right) = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1,$$

ce que nous voulions démontrer.

– Il nous reste le cas général, celui d'une somme non nulle quelconque. On définit

$$\begin{aligned} \widetilde{a} : \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ [n] &\longmapsto a_n - \frac{1}{N} \sum_{[m] \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} a_m, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\sum_{[n] \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \widetilde{a}([n]) = 0.$$

Notre série de Dirichlet se décompose en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{a}([n]) n^{-z} + \frac{1}{N} \left(\sum_{[m] \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} a_m\right) \zeta(z),$$

c'est-à-dire une série de Dirichlet avec somme sur une période nulle, plus un coefficient fois la fonction ζ.

Pour achever la démonstration, il ne reste qu'à remarquer que, si $\sum_{[m] \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} a_m \neq 0$, alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-z}$ n'est pas bornée lorsque $z \to 1$ dans le demi-plan $\text{Ré}\, z > 1$. Donc $\sigma = 1$.

$\square$

V.4. La fonction ζ de Riemann

La figure suivante représente les différentes propriétés de la fonction ζ selon les parties de $\mathbf{C}$ considérées.

– Sur la partie grisée, la série $\sum n^{-z}$ est absolument convergente. De plus, en vertu du théorème V.4.1 ci-dessous, elle y admet un développement en produit infini.

– Elle se prolonge en une fonction méromorphe avec un seul pôle, de résidu 1, en 1 (il restera à étendre ce résultat de $\text{Ré}\, z > 0$ à $\mathbf{C}$). Voir le théorème V.4.3. La méthode montrera qu'elle s'annule en les $-2n$.

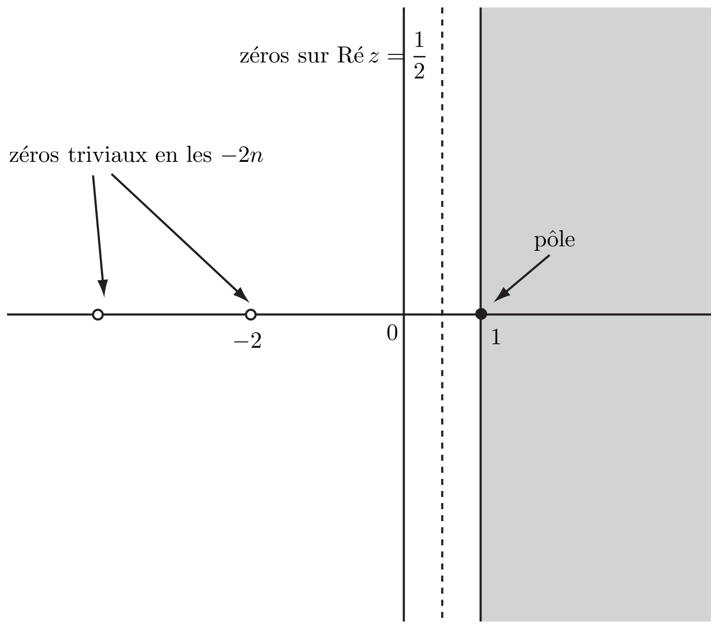


FIGURE 2. Propriétés de la fonction ζ de Riemann

– Elle n'a pas de zéro, ni sur Ré $z = 0$ ni sur Ré $z = 1$, ce que nous démontrerons aussi.

– Une conjecture datant de 1859 et toujours irrésolue, l'« hypothèse de Riemann », affirme que les zéros « non triviaux » de ζ ont tous une partie réelle égale à 1/2.

Commençons par le produit infini. Ici, $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

Théorème V.4.1. *Le produit*

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$$

converge normalement pour $\text{Ré}(z) > 1$*, uniformément sur les compacts de* $\text{Ré}(z) \geq 1+\delta$ *(pour tout* $\delta > 0$*) et on a*

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1}.$$

Démonstration. On a la convergence

– uniforme sur tout compact de $1-\dfrac{1}{p^z}$ vers 1,

– normale sur tout compact de $\sum_{p\in\mathcal{P}}\dfrac{1}{p^z}$,

d'où la convergence du produit. On écrit

$$\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{p^z}+\frac{1}{p^{2z}}+\cdots.$$

De sorte que, en appelant, pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\mathcal{E}(N)$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers sont $\leq N$, on a

$$\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathcal{E}(N)}\frac{1}{n^z},$$

puis, comme $\mathcal{E}(N) \supset \{1,\ldots,N\}$,

$$\left|\zeta(z)-\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)^{-1}\right| \leq \sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{\text{Ré}(z)}},$$

on fait tendre N vers $+\infty$. D'où le fait que le produit en question converge vers $\zeta(z)$. $\square$

Corollaire V.4.2. *Si* $\text{Ré}(z) > 1$*,* $\zeta(z) \neq 0$*.* $\square$

Venons-en maintenant au prolongement, qui se réalise, comme cela a été fait pour la fonction Γ (dans la proposition II.2.2), à l'aide d'une équation fonctionnelle.

***Théorème V.4.3* (Équation fonctionnelle pour la fonction ζ de Riemann).** *La fonction*

$$Z(z) = \pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ *tout entier. Elle satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$Z(1-z) = Z(z).$$

Ses seuls pôles sont en 0 *et* 1*, ils sont simples, de résidus respectifs* -1 *et* 1*. Tous les zéros de* Z *sont tels que* $0 \leq \mathrm{Ré}\, z \leq 1$.

***Corollaire V.4.4*.** *La fonction* ζ *de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$*, avec un unique pôle, en* 1*, qui est simple et de résidu* 1.

Démonstration du corollaire. La fonction $\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ ne s'annule pas, donc ζ prolongée a au pire les pôles de Z. En 0, Γ a un pôle simple, sa valuation est donc -1 (proposition II.2.2), donc ζ n'a pas de pôle là. En $z=1$,

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \Gamma(1/2)/\sqrt{\pi} = 1,$$

donc le résidu de ζ est le même que celui de Z. $\square$

Démonstration du théorème. Pour $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{Ré}\, z \geq 1+\varepsilon$, comme la série de Dirichlet définissant ζ est uniformément convergente sur les compacts, on peut écrire

$$\begin{aligned} Z(z) &= \pi^{-z/2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z/2-1}\,dt\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z} \\ &= \pi^{-z/2}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{z/2-1}}{n^z}\right)dt, \end{aligned}$$

après quoi, on fait le changement de variables $t = \pi n^2 x$, pour obtenir

$$\begin{aligned} Z(z) &= \pi^{-z/2}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}\pi^{z/2}x^{z/2-1}\right)dx \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)x^{z/2-1}\,dx. \end{aligned}$$

En posant

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

on a donc

$$\begin{aligned} Z(z) &= \int_0^1 \omega(x)x^{z/2}\frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty}\omega(x)x^{z/2}\frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty}\omega(1/x)x^{-z/2}\frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty}\omega(x)x^{z/2}\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

On utilise la proposition suivante.

Proposition V.4.5

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\,\omega(x).$$

En l'admettant provisoirement, on trouve

$$\begin{aligned}Z(z) &= \int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x}\,\omega(x)\right)x^{-z/2}\,\frac{dx}{x}+\int_1^{+\infty}\omega(x)x^{z/2}\,\frac{dx}{x}\\ &= -\int_1^{+\infty}\frac{x^{-z/2}}{2}\,\frac{dx}{x}+\int_1^{+\infty}\frac{x^{-z/2+1/2}}{2}\,\frac{dx}{x}+\int_1^{+\infty}\omega(x)\left(x^{-z/2+1/2}+x^{z/2}\right)\,\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Le changement de variable $u=\sqrt{x}$ donne le calcul des deux premières intégrales et il reste

$$Z(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\int_1^{+\infty}\omega(x)\left(x^{-z/2+1/2}+x^{z/2}\right)\,\frac{dx}{x},$$

une forme très symétrique (pour $z\mapsto 1-z$). Le troisième terme (l'intégrale) est holomorphe pour $\text{Ré}\,z>0$ puisque tous les termes dans la série définissant ω sont à décroissance rapide en $+\infty$... mais comme il est invariant par $z\mapsto 1-z$, il est tout aussi holomorphe pour $\text{Ré}\,z<1$, donc c'est finalement une fonction entière de z. Cette formule donne donc toutes les assertions du théorème, y compris les deux pôles simples et leurs résidus.

À l'exception de l'affirmation sur les zéros. Mais $\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)$ ne s'annule pas, donc $Z(a)=0$ si et seulement si $\zeta(a)=0$. Comme, pour $\text{Ré}\,a>1$, la fonction ζ est écrite comme un produit infini de termes tous non nuls (théorème V.4.1), elle n'a pas de zéro dans ce demi-plan, donc $\text{Ré}\,a\leq 1$. Par invariance par $z\mapsto 1-z$, on a aussi $0\leq \text{Ré}\,a\leq 1$. □

Il reste à démontrer la proposition V.4.5. On commence par remplacer

$$\omega(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2\pi x}\quad\text{par la série de Fourier}\quad 2\omega(x)+1=\sum_{m\in\mathbf{Z}}e^{-m^2\pi x}=\theta(x).$$

Ce qui transforme la proposition en :

Proposition V.4.6

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}\,\theta(x).$$

Démonstration. C'est un simple calcul utilisant la formule sommatoire de Poisson :

$$\begin{aligned}\theta\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{m\in\mathbf{Z}}e^{-m^2\pi/x}\\ &= \sum_{m\in\mathbf{Z}}f_{1/x}(m)\ \text{(avec } f_a(t)=e^{-\pi a t^2})\\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}\widehat{f}_{1/x}(n)\ \text{en désignant par } \widehat{f}\text{ la transformée de Fourier}\\ &= \sqrt{x}\sum_{n\in\mathbf{Z}}f_x(n)\ \text{parce que } \widehat{f}_{1/x}=\sqrt{x}\,f_x\\ &= \sqrt{x}\,\theta(x).\end{aligned}$$

La démonstration est terminée. Dans un souci de complétude, deux mots sur

– la formule sommatoire de Poisson[(2)] : étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide[(3)], elle affirme que

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}f(m)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(n)$$

(les deux séries sont convergentes et ont la même somme),

(2) Voir au besoin une démonstration dans l'exercice V.7.

(3) C'est dire que $\left|t^n f^{(p)}(t)\right|$ est bornée sur $\mathbf{R}$ pour tous n et p. La transformée de Fourier de f a alors la même propriété.

– la transformée de Fourier de f_a : on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}_a(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a y^2 - 2i\pi xy}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi v^2 - 2i\pi xv/\sqrt{a}}\,\frac{dv}{a} \text{ (avec le changement de variable } v = y\sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\widehat{f}_1\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\end{aligned}$$

et

$$\widehat{f}_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2 - 2i\pi xy}\,dy = e^{-\pi x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(y^2 - x^2 + 2ixy)}\,dy,$$

après quoi on pose $z = y + ix$ et on intègre (ix est fixé) sur la droite des $ix + y$, comme la fonction n'a pas de pôle, l'intégrale est la même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2}\,dy = 1, \text{ donc } \widehat{f}_1(x) = e^{-\pi x^2} = f_1(x)$$

et

$$\widehat{f}_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi x^2/a} = \frac{1}{\sqrt{a}} f_{1/a}(x),$$

ce que nous avons utilisé.

□

Pour d'autres formes de l'équation fonctionnelle, voir l'exercice V.4.

On démontre maintenant que la fonction ζ n'a pas de zéro sur la droite $\text{Ré}\, z = 1$. On pose

$$\Phi(z) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z},$$

définissant ainsi une fonction holomorphe pour $\text{Ré}\, z > 1$. On commence par montrer :

Lemme V.4.7. *La fonction Φ est méromorphe pour $\text{Ré}\, z > \frac{1}{2}$, de plus la fonction*

$$\Phi(z) - \frac{1}{z-1}$$

n'a pas de pôle pour $\text{Ré}\, z \geq 1$.

Démonstration. On sait que, pour $\text{Ré}\, z > 1$,

$$\zeta(z)^{-1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} f_p(z).$$

On applique la proposition IV.2.3, qui donne la dérivée logarithmique

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{f_p'(z)}{f_p(z)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z - 1}$$

(puisque $f_p(z) = 1 - e^{-z\ln p}$, $f_p'(z) = e^{-z\ln p}\ln p$). Mais on a aussi

$$\frac{1}{p^z - 1} = \frac{1}{p^z}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}\right) = \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \cdots$$

donc

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z} + \sum_{p \in \mathcal{P}} h_p(z)$$

avec

$$h_p(z) = \frac{\ln p}{p^{2z}}\left(1 + \frac{1}{p^z} + \cdots\right)$$

et

$$|h_p(z)| \leq \frac{\ln p}{|p^{2z}|}\frac{1}{\left|1 - \dfrac{1}{p^z}\right|} \leq 2\frac{\ln p}{|p^{2z}|}$$

(en minorant brutalement $|p^z|$ par 2). La série des h_p converge donc uniformément sur les compacts de $\text{Ré}(2z) \geq 1 + \delta$.

On a donc écrit, pour $\text{Ré}\, z > 1$, Φ comme somme de $-\zeta'/\zeta$, qui est méromorphe pour $\text{Ré}\, z > 0$, et de la somme des h_p, qui sont toutes holomorphes pour $\text{Ré}\, z > 1/2$. Donc Φ est méromorphe pour $\text{Ré}\, z > 1/2$, a un pôle en 1 et d'autres aux zéros de ζ (mais pas d'autre pôle dans $\text{Ré}\, z > 1/2$). □

Proposition V.4.8. *La fonction ζ n'a pas de zéro sur la droite* $\text{Ré}\, z = 1$.

Démonstration. Supposons qu'elle ait un zéro d'ordre m en $1 + ib$ pour un $b \neq 0$ et soit n l'ordre de son zéro en $1 + 2ib$ (rien n'empêche n d'être nul). Comme on a

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)},$$

$1 - ib$ est un zéro de ζ d'ordre m, de même l'éventuel zéro de ζ en $1 - 2ib$ est d'ordre n. L'expression de la dérivée logarithmique de ζ à l'aide de Φ dans la démonstration précédente montre que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Phi(1 + \varepsilon) = 1, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Phi(1 + \varepsilon \pm ib) = -m, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Phi(1 + \varepsilon \pm 2ib) = -n$$

(ordre du pôle de ζ en 1, ordre du zéro de ζ en $1 \pm ib$, en $1 \pm 2ib$), puisque

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - 1} + f(z) \text{ avec } f \text{ holomorphe en } 1$$

donc

$$\varepsilon\Phi(1 + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \varepsilon f(\varepsilon) \to 1,$$

que

$$\Phi(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + g(z) = -\frac{m}{z - (1 \pm ib)} + g(s) \text{ avec } g \text{ holomorphe en } 1 \pm ib$$

donc

$$\varepsilon\Phi(1 + \varepsilon \pm ib) = -\frac{\varepsilon m}{\varepsilon} + \varepsilon g(1 + \varepsilon \pm ib) \to -m$$

(et de même en $1 \pm 2ib$). Maintenant on considère

$$\left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}}\right)^4,$$

qui est un réel positif, de sorte que, pour $z = 1 + \varepsilon > 1$,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}}\right)^4 \geq 0.$$

En développant la puissance 4 par la formule du binôme, on trouve que ce réel positif est

$$\Phi(1 + \varepsilon + 2ib) + 4\Phi(1 + \varepsilon + ib) + 6\Phi(1 + \varepsilon) + 4\Phi(1 + \varepsilon - ib) + \Phi(1 + \varepsilon - 2ib).$$

On multiplie par ε et on fait tendre celui-ci vers 0, on obtient

$$-2n - 8m + 6 \geq 0,$$

ce qui, avec m et n entiers naturels, force m à être nul, ce que nous voulions démontrer. □

En conclusion : les zéros de la fonction ζ de Riemann sont les $-2n$ $(n \geq 1)$ ou compris dans la bande ouverte $0 < \text{Ré}(z) < 1$.

V.5. Le théorème des nombres premiers

La description de ζ comme un produit infini montre le lien de cette fonction avec la répartition des nombres premiers parmi les entiers. C'est d'ailleurs dans un mémoire sur la répartition des nombres premiers que Riemann a étudié la fonction zêta (et formulé sa conjecture). Le théorème des nombres premiers a une longue histoire, conjecturé depuis le XVII$^{\text{e}}$ siècle, une forme faible démontrée par Chebyschev en 1848, un programme de preuve par Riemann en 1851, démontré indépendamment par Hadamard en 1896, il en existe aujourd'hui de nombreuses démonstrations. La plus élégante est sans doute celle expliquée par Kahane [**7**], que l'on trouvera détaillée par Bost dans [**12**].

Celle que je propose vient de [**9**] (voir aussi [**8**]). Comme les démonstrations originelles, elle utilise les propriétés des fonctions analytiques que nous avons exposées dans ces notes. Elle en est donc une conclusion naturelle. Trêve de bavardage, voici l'énoncé :

Théorème V.5.1. *Pour $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On a*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ quand } x \to +\infty.$$

Même si la démonstration proposée ici est « courte », elle va prendre un peu de place. On commence par considérer la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{p \le x} \ln p.$$

C'est une fonction réelle de variable réelle, une fonction en escalier, positive et croissante. Une des étapes de la démonstration est de montrer que $\varphi(x)$ est équivalente à x quand x tend vers l'infini. On commence par :

Lemme V.5.2. *La fonction $\varphi(x)/x$ est bornée.*

Démonstration. On écrit

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \ge \binom{2n}{n} \ge \prod_{n<p\le 2n} p,$$

parce que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot n}$$

donc les nombres premiers compris entre $n+1$ et $2n$ divisent le numérateur et pas le dénominateur, donc divisent $\binom{2n}{n}$. Puis on prend les logarithmes des deux membres, obtenant

$$\varphi(2n) - \varphi(n) = \sum_{p\le 2n} \ln p - \sum_{p \le n} \ln p = \sum_{n+1 \le p \le 2n} \ln p = \ln \prod_{n<p\le 2n} p \le 2n \ln 2$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $x \in \mathbf{R}$, et $n \le x < n+1$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(2x) &= \sum_{p \le 2x} \ln p \le \sum_{p\le 2n} \ln p + \ln(2x+1) = \varphi(2n) + \ln(2x+1) \\ \varphi(n) &\le \varphi(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(2x) - \varphi(x) &\le \varphi(2n) - \varphi(n) + \ln(2x+1) \\ &\le 2n \ln 2 + \ln(2x+1) \\ &\le 2x \ln 2 + \ln(2x+1). \end{aligned}$$

La fonction $\ln(2x+1)/x$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, donc est bornée supérieurement par un $M > 0$, donc on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(2x) - \varphi(x) \le 2x \ln 2 + Mx = (2\ln 2 + M)x = 2Cx$$

pour une certaine constante $C > \ln 2$. Enfin, en appliquant cette inégalité à $u = 2x$, etc.,

$$\begin{aligned} \varphi(u) - \varphi\left(\frac{u}{2}\right) &\leq Cu \\ \varphi\left(\frac{u}{2}\right) - \varphi\left(\frac{u}{4}\right) &\leq C\frac{u}{2} \\ \cdots &\leq \cdots \\ \varphi\left(\frac{u}{2^k}\right) - \varphi\left(\frac{u}{2^{k+1}}\right) &\leq C\frac{u}{2^k} \end{aligned}$$

et donc, en ajoutant ces inégalités

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{u}{2^{k+1}}\right) \leq C(u + \frac{u}{2} + \cdots) \leq 2Cu.$$

Mais, pour k assez grand, $u/2^{k+1} < 2$ et donc $\varphi(u/2^{k+1}) = 0$. On en déduit que $\varphi(x) \leq 2Cx$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. $\square$

On utilise ensuite un lemme sur la « transformée de Laplace »

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt.$$

Lemme V.5.3. *Soit f une fonction bornée et continue par morceaux sur $\mathbf{R}^+$. On suppose que la fonction*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt, \text{ définie pour } \operatorname{Ré}(z) > 0$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\operatorname{Ré} z \geq 0$. Alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existe et vaut } g(0).$$

Ce lemme sera démontré plus bas (page 67). Utilisons le pour démontrer

Lemme V.5.4. *L'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^2}\,dx$$

est convergente.

Démonstration. On fait le changement de variable $x = e^t$, de sorte que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(e^t) - e^t}{e^{2t}}\,e^t\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt,$$

en posant $f(t) = \varphi(e^t)e^{-t} - 1$. La fonction f est continue par morceaux (comme φ) et elle est bornée puisque $\varphi(x)/x$ l'est (lemme V.5.2). Il suffit donc de montrer que la transformée de Laplace de f est analytique sur $\operatorname{Ré}(z) \geq 0$ et d'appliquer le lemme V.5.3. On calcule donc

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt = \int_0^{+\infty} (\varphi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^{z+2}}\,dx.$$

Mais on a, en décomposant sur les intervalles d'un nombre premier p au nombre premier suivant p^+ sur lesquels φ est constante égale à $C_p = \sum_{q\le p} \ln q$ (de sorte que $C_{p^+} = C_p + \ln p^+$),

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\,dx &= \sum_{p\in\mathcal{P}} \int_p^{p^+} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\,dx \text{ (avec, ici, } s = z+1) \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} C_p \int_p^{p^+} \frac{dx}{x^{s+1}} \\
&= -\frac{1}{s} \sum_{p\in\mathcal{P}} C_p \left(\frac{1}{(p^+)^s} - \frac{1}{p^s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{C_p}{p^s} - \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{C_{p^+} - \ln p}{(p^+)^s}\right) \\
&= \frac{1}{s} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s} \\
&= \frac{\Phi(s)}{s}.
\end{aligned}$$

Donc ici

$$g(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{z+2}}\,dx - \frac{dx}{x^{z+1}} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Nous savons (proposition V.4.7) que $h(z) = \Phi(z) - \dfrac{1}{z-1}$ est holomorphe pour $\text{Ré}\, z \geq 1$, donc

$$\Phi(z+1) - \frac{1}{z} = h(z+1),$$

ce qu'on divise par $z+1$, obtenant :

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z(z+1)} = \frac{h(z+1)}{z+1}$$

est holomorphe sur $\text{Ré}(z) \geq 0$ ($h(z)$ est holomorphe pour $\text{Ré}\, z \geq 1$ et donc $h(z+1)$ l'est pour $\text{Ré}\, z \geq 0$) et il en est de même de

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1} + \frac{h(z+1)}{z+1},$$

c'est-à-dire de $g(z)$. On peut donc appliquer le lemme V.5.3. $\square$

On en arrive ainsi à l'équivalence annoncée de $\varphi(x)$ avec x.

Proposition V.5.5. *On a $\varphi(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.*

Démonstration. On montre que

(1) Pour tout $\lambda > 1$, $\{x \mid \varphi(x) \geq \lambda x\}$ est borné,
(2) pour tout $\mu < 1$, $\{x \mid \varphi(x) \leq \mu x\}$ est borné.

Ainsi, pour $x \geq M$, on n'a ni $\dfrac{\varphi(x)}{x} \geq \lambda > 1$ ni $\dfrac{\varphi(x)}{x} \leq \mu < 1$, donc $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Montrons d'abord (1). Sinon, il existerait un $\lambda > 1$ et un $M > 0$ pour lesquels

$$x \geq M \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} \geq \lambda.$$

Mais alors, pour $x \geq M$,

$$\begin{aligned}
\int_x^{\lambda x} \frac{\varphi(t) - t}{t^2}\,dt &\geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,dt \text{ (φ est croissante)} \\
&= \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - u}{u^2}\,du \text{ en posant } t = ux \\
&> 0 \text{ et indépendant de } x,
\end{aligned}$$

ce qui empêche l'intégrale du lemme précédent de converger. Pour (2), supposons de même qu'il existe un $\lambda > 1$ et un $M > 0$ tels que

$$x \geq M \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Notons que la constante $2C$ obtenue dans la démonstration du lemme V.5.2 est supérieure à $2\ln 2$ et en particulier à 1 (pas de contradiction à ce niveau !). On écrit de même

$$\int_{x/\lambda}^{x} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt \leq \int_{x/\lambda}^{x} \frac{\frac{x}{\lambda}-t}{t^2}\,dt = \int_{1/\lambda}^{1} \frac{\frac{1}{\lambda}-u}{u}\,du,$$

donc

$$\left|\int_{x/\lambda}^{x} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt\right| = \int_{x/\lambda}^{x} \frac{t-\varphi(t)}{t^2}\,dt \geq \int_{1/\lambda}^{1} \frac{u-\frac{1}{\lambda}}{u}\,du > 0$$

et indépendant de x, ce qui, à nouveau, empêche l'intégrale de converger. □

Démontrons enfin le théorème des nombres premiers.

Démonstration du théorème V.5.1. On vient de voir que $x \sim \varphi(x)$ à l'infini, il suffit donc de montrer, ce que nous allons faire, que $\pi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{\ln x}$. Remarquons d'abord que

$$\varphi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq \sum_{p \leq x} \ln x = \pi(x) \ln x.$$

En plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\varphi(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} (1-\varepsilon) \ln x,$$

et donc

$$\varphi(x) \geq (1-\varepsilon)\ln x(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \geq (1-\varepsilon)\pi(x)\ln x\left(1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}\right).$$

En utilisant le fait que $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}$ et (ce que nous venons de remarquer) que $\pi(x) \geq \varphi(x)/\ln x$, on voit que

$$\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \leq \frac{x^{1-\varepsilon}\ln x}{\varphi(x)}.$$

Comme $\varphi(x) \sim x$, le rapport $\pi(x^{1-\varepsilon})/\pi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc, pour $x \geq M$, disons, on a $\pi(x^{1-\varepsilon})/\pi(x) \leq \varepsilon$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un M tel que,

$$x \geq M \Rightarrow \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \leq \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon \leq 1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 \leq (1-\varepsilon)\left(1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}\right) \leq \frac{\varphi(x)}{\pi(x)\ln x} \leq 1.$$

Ce qui donne le fait que $\varphi(x)/\pi(x)\ln x$ tend vers 1 et l'équivalence voulue. □

Il reste à démontrer le lemme sur la transformée de Laplace.

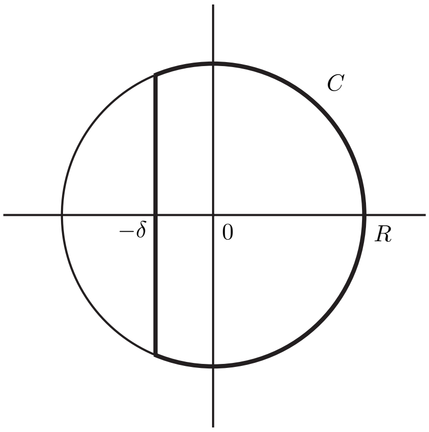
Démonstration du lemme V.5.3. Remarquons d'abord que, comme f est bornée et continue par morceaux sur $\mathbf{R}^+$, lorsque $\text{Ré}(z) > 0$, l'intégrale définissant g est convergente et définit bien une fonction analytique de z. De même, pour $T > 0$, la fonction

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$$

est une fonction entière. Nous voulons montrer, sous l'hypothèse faite sur g, que $g_T(0)$ a une limite quand $T \to +\infty$ et que cette limite est $g(0)$.

L'hypothèse sur g est que celle-ci se prolonge en une fonction analytique sur $\text{Ré}(z) \geq 0$. On peut donc choisir $\delta > 0$ assez petit pour que g soit analytique au voisinage du chemin C (dépendant de $R > 0$ et de δ) composé de

– l'arc du cercle $|z| = R$ défini par le demi-plan $\text{Ré}(z) \geq -\delta$,
– la corde $\text{Ré}(z) = -\delta$ de ce cercle.



On écrit la formule de Cauchy pour les valeurs en 0 des fonctions analytiques g et de g_T légèrement modifiées par multiplication par une fonction qui vaut 1 en 0,

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C (g(z) - g_T(z))e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Appelons B un majorant de $|f|$ sur $\mathbf{R}^+$. On a pour $\mathrm{Ré}(z) > 0$,

$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt\right| \leq B\int_T^{+\infty}\left|e^{-zt}\right|dt = \frac{Be^{-T\,\mathrm{Ré}(z)}}{\mathrm{Ré}(z)}.$$

D'autre part, si $z = Re^{i\theta}$, on a

$$\left|e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = e^{T\,\mathrm{Ré}\,z}\left|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right| = \frac{e^{T\,\mathrm{Ré}(z)}}{R}\left|\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right| = \frac{e^{T\,\mathrm{Ré}(z)}}{R}2\cos\theta = \frac{2e^{T\,\mathrm{Ré}(z)}\,\mathrm{Ré}(z)}{R^2}$$

puisque

$$\frac{R}{z} + \frac{z}{R} = e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\theta = \frac{\mathrm{Ré}\,z}{R}.$$

Ainsi, si C^+ désigne le demi-cercle ($|z| = R$, $\mathrm{Ré}(z) \geq 0$), on a (c'est l'« estimation standard ») :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}(g(z) - g_T(z))\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{\pi R}{2\pi}\,\frac{Be^{-T\,\mathrm{Ré}(z)}}{\mathrm{Ré}(z)}\,\frac{2e^{T\,\mathrm{Ré}(z)}\,\mathrm{Ré}(z)}{R^2} = \frac{B}{R}.$$

Désignons par C^- le « reste » du chemin C (la partie sur laquelle $\mathrm{Ré}(z) < 0$). On écrit d'abord, pour $\mathrm{Ré}(z) < 0$,

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq B\int_0^T e^{-\,\mathrm{Ré}(z)t}\,dt \leq \frac{Be^{-\,\mathrm{Ré}(z)T}}{-\,\mathrm{Ré}(z)}.$$

De plus, comme g_T est entière, elle n'a pas de pôle du tout et son intégrale sur C^- est égale à son intégrale sur le demi-cercle S^- ($|z| = R$, $\mathrm{Ré}(z) < 0$). Sur ce demi-cercle, la majoration ci-dessus pour l'autre facteur dans l'intégrale donne

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C^-} g_T(z)e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{B}{R}.$$

Posons $h(z) = \dfrac{g(z)}{z}\left(1 + \dfrac{z^2}{R^2}\right)$, une fonction holomorphe sur $(\mathrm{Ré}(z) < 0) \cap C$, indépendante de T. Sur tout compact de notre demi-plan $\mathrm{Ré}(z) < 0$, e^{Tz} tend vers 0 (quand T tend vers l'infini) de même que son produit avec h, on a donc

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{C^-} h(z)e^{Tz}\,dz = 0.$$

On rassemble toutes ces estimations et on les emballe. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ assez grand pour que $\dfrac{B}{R} < \varepsilon$ et soit T assez grand pour que (notre dernière estimation)

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C^-} g(z) e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| < \varepsilon.$$

On a alors

$$|g(0) - g_T(0)| < 3\varepsilon$$

donc $g_T(0)$ tend bien vers $g(0)$ comme annoncé. □

Exercices sur les séries de Dirichlet

Exercice V.1. Montrer que, pour x réel strictement positif, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{du}{u^x} < \frac{1}{n^x} < \int_{n-1}^{n} \frac{du}{u^x}$$

et aussi

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x} \leq \zeta(x) < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x}.$$

Calculer $\displaystyle\int_1^t \frac{du}{u^x}$ pour $t > 0$ et montrer que, pour $x > 1$, on a

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

En déduire que

$$\lim_{x>1, x\to 1} (x-1)\zeta(x) = 1.$$

***Exercice V.2* (La série D_2)**. Déterminer σ et σ_{abs} pour la série

$$D_2(z) = \sum_{n \geq 1} (1 - 2^{1-z}) n^{-z}.$$

Montrer que

$$D_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-z}.$$

et que

$$D_2(z) = (1 - 2^{1-z})(\zeta(z) - (z-1)^{-1}) + (z-1)^{-1}(1 - 2^{1-z}).$$

En admettant[(4)] que $\zeta(z) - (z-1)^{-1}$ se prolonge en une fonction entière de z, montrer qu'il en est de même de $D_2(z)$. Ainsi, les demi-plans ouverts de convergence, de convergence absolue et le plus grand demi-plan sur lequel la fonction se prolonge holomorphiquement peuvent être distincts.

***Exercice V.3* (Un théorème de Landau[(5)])**. Soit $\sum a_n n^{-z}$ une série de Dirichlet à coefficients réels positifs ou nuls, et soit σ son abscisse de convergence absolue. On veut montrer que la fonction D, somme de la série, holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Ré}(z) > \sigma$, ne se prolonge analytiquement sur aucun voisinage de σ dans $\mathbf{C}$.

On suppose au contraire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que D se prolonge analytiquement sur $|z - \sigma| < \varepsilon$. Soit $x \in]\sigma, +\infty[$ et soit $\eta \in [0, \varepsilon[$. Montrer que

$$D(x - \eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta^k}{k!} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^k \frac{a_n}{n^x} \right).$$

---

(4) Voir le cours, ou l'exercice V.5.

(5) Edmund Landau (1877–1938), est l'auteur de nombreux théorèmes de théorie des nombres et d'analyse complexe. Il était professeur à l'université de Göttingen. Il dut quitter son poste après un boycott de ses cours organisé par les étudiants nazis, une « raison » en étant que la façon dont il définissait π ($\pi/2$ est le premier zéro positif de la fonction $\cos = \mathrm{Ré}\exp$, comme c'est fait dans [**1**]) n'était pas adaptée aux étudiants allemands (sous-entendu, elle était bonne pour les juifs).

En déduire que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta^k}{k!} (\ln n)^k \right)$$

est convergente, puis que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x-\eta}}$$

l'est aussi. En choisissant convenablement x et η, en déduire une contradiction et le résultat annoncé.

Exercice V.4. On a démontré (théorème V.4.3) une « équation fonctionnelle pour la fonction ζ » sous la forme $Z(1-z) = Z(z)$.

(1) Soit $\xi(z) = z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$. Montrer que ξ est une fonction entière et qu'elle satisfait à $\xi(1-z) = \xi(z)$.

(2) Montrer que

$$\zeta(1-z) = \pi^{-z} 2^{1-z} \cos \frac{\pi z}{2}\, \Gamma(z)\zeta(z).$$

Exercice V.5.

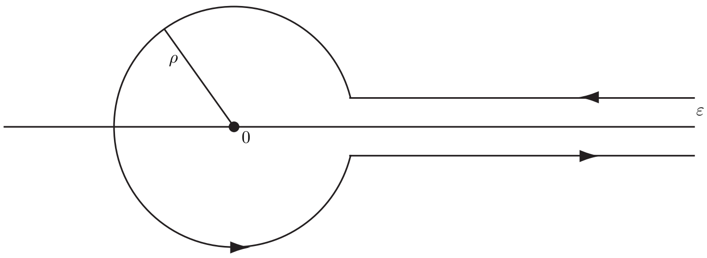
(1) Montrer que pour $\text{Ré}(z) > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on a

$$\Gamma(z) n^{-z} = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt,$$

puis que pour $\text{Ré}(z) > 1$ on a

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

(2) Soit, pour ρ, ε tels que $0 < \varepsilon \ll \rho < 2\pi$, $C_{\rho,\varepsilon}$ le contour ci-dessous. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$



l'intégrale

$$I(z) = \int_{C_{\rho,\varepsilon}} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1}\, dw$$

est bien définie, ne dépend pas de ρ, ε et définit une fonction entière de z.

(3) En utilisant une majoration (pour z fixé) du type

$$\left| \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} \right| < C_z \rho^{\text{Ré}(z)-2}$$

valable pour $|w| = \rho > 0$ assez petit, montrer que $I(z) = (e^{2i\pi z} - 1)\Gamma(z)\zeta(z)$.

(4) En déduire que l'on a

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \varphi(z)$$

où φ est une fonction entière.

***Exercice V.6* (Équation fonctionnelle pour la fonction zêta de Riemann)**. On reprend les notations de l'exercice V.5. On note $\mathcal{H}_k$ le contour C_{ε,ρ_k} avec $0 < \varepsilon \ll 1$ et $\rho_k = (2k+1)\pi$ $(k \geq 1)$.

(1) Montrer que pour $\text{Ré}(z) < 0$ on a

$$\lim_{k\to\infty, \varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{H}_k} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1}\, dw = 0.$$

(2) Déduire (de l'exercice précédent) que $I(z) = (2i\pi)^z (e^{i\pi z} - 1)\zeta(1-z)$ (on note $i^z = e^{i\pi z/2}$).

(3) En utilisant la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, montrer que

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2)\Gamma(1-z)\zeta(1-z).$$

(4) En utilisant la formule de duplication

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)}{2^{2z}}$$

en déduire que si l'on pose $Z(z) = \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$, on a l'égalité de fonctions méromorphes

$$Z(z) = Z(1-z).$$

***Exercice V.7* (Formule sommatoire de Poisson).** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide. Montrer que

(1) la série $\sum_{m\in\mathbf{Z}} f(x+m)$ converge absolument pour tout x, vers une fonction F qui est périodique de période 1, dans L^1, et somme de sa série de Fourier.

(2) Montrer que les coefficients de la série de Fourier de F sont les $\widehat{f}(n)$. En évaluant $F(0)$, en déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

***Exercice V.8* (Formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin, application à ζ).** Soit $(b_r(x))_{r\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes définis par récurrence sur $[0,1]$ par

$$b_0 \equiv 1, \quad b_r' = rb_{r-1} \text{ pour } \geq 1 \text{ et } \int_0^1 b_r(x)\,dx = 0 \text{ pour } r \geq 1.$$

On définit la fonction de Bernoulli $B_r(x)$ comme la fonction périodique de période 1 qui coïncide avec b_r sur $[0,1[$.

(1) Montrer que

$$b_r(x) = r\left[\int_0^x tb_{r-1}(t)\,dt + \int_x^1 (t-1)b_{r-1}(t)\,dt\right] \quad (r \geq 1).$$

Calculer b_1, b_2, b_3 et montrer que $b_r(0) = 0$ pour r impair ≥ 3.

(2) Montrer que $B_r(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ pour $r \geq 2$ et que, pour $r \geq 3$, B_r est dérivable et satisfait $B_r' = rB_{r-1}$ sur $\mathbf{R}$.

(3) On note $B_r = B_r(0) = b_r(0)$. Montrer que les B_r sont les nombres de Bernoulli définis dans l'exercice I.12.

(4) Montrer que pour f de classe C^{k+1} sur $[a,b]$, $a, b \in \mathbf{Z}$, on a

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{r=0}^{k} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!}\Big(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\Big) + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,dt$$

(on commencera par le cas $a = 0$, $b = 1$ puis on fera une récurrence sur k).

(5) En déduire que la fonction

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

(holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré}(z) > 1\}$) se prolonge en une fonction holomorphe sur tout demi-plan $\{\text{Ré}(z) > -k\}$ $(k \in \mathbf{N})$.

(6) En conclure que

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \varphi(z)$$

où φ est une fonction entière.

Exercice V.9 **(Séries de Dirichlet générales)**. Soit (λ_n) une suite strictement croissante de nombres réels tendant vers $+\infty$. On appelle *série de Dirichlet d'exposants* (λ_n) une série de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad a_n \in \mathbf{C}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

(1) Montrer que[6] pour $\alpha < \beta$ réels et z tel que $\mathrm{Ré}(z) = \sigma > 0$, on a l'égalité

$$\left| e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} \right| \leq \frac{|z|}{\sigma} (e^{-\alpha \sigma} - e^{-\beta \sigma}).$$

(2) Montrer que si une série de Dirichlet $f(z)$ d'exposants (λ_n) converge pour $z = z_0$, elle converge uniformément dans tout domaine de la forme

$$(*) \qquad \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}(z - z_0) \geq 0 \text{ et } |\mathrm{Arg}(z - z_0)| \leq \alpha\}$$

où $\alpha \in [0, \pi/2[$.

(3) En déduire que si la série converge pour $z = z_0$, elle converge dans le demi-plan ouvert $\mathrm{Ré}(z) > z_0$ et que sa somme y est une fonction holomorphe, dont on calculera la dérivée.

(4) En déduire que l'ensemble de convergence de la série contient un demi-plan ouvert maximal.

(5) Montrer que si la série converge pour $z = z_0$, on a $f(z) \to f(z_0)$ lorsque $s \to z_0$ en restant dans un domaine du type $(*)$.

(6) Montrer que la somme f est identiquement nulle sur un demi-plan non vide de convergence (ou un ouvert non vide de celui-ci) si et seulement si tous les coefficients a_n sont nuls.

(7) Donner un exemple où la série de Dirichlet ne converge en aucun point z_0.

Exercice V.10 **(La fonction zêta de Hurwitz)**. Pour a réel > 0 on pose

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + a)^{-z},$$

de sorte que $\zeta(z, 1) = \zeta(z)$. Vérifier que $\zeta(z, a)$ est une série de Dirichlet générale, au sens de l'exercice V.9.

(1) Montrer que $\zeta(z, a)$ converge normalement, uniformément sur tout compact de $\mathrm{Ré}(z) > 1$, et définit une fonction holomorphe sur ce domaine.

(2) Utiliser la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin (exercice V.8) pour montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une fonction $\varphi_k(z, a)$ holomorphe sur $\mathrm{Ré}(z) > -k$, telle que pour $\mathrm{Ré}(z) > 1$ on ait

$$\zeta(z, a) = \frac{1}{z - 1} + \varphi_k(z, a).$$

(3) En déduire que la fonction φ définie par

$$\varphi(z, a) = \zeta(z, a) - \frac{1}{z - 1}$$

est une fonction entière.

(4) Montrer que $\varphi(1, a) = -\Gamma'(a)/\Gamma(a)$.

[6] Voir au besoin le cours !

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Audin – *Analyse complexe*, ULP, Strasbourg, 2007, Cours de Licence L3 et Magistère 1^{e} année, disponible sur `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/analysecomp.pdf`.

[2] J.-B. Bost – *Fonctions analytiques d'une variable complexe*, École polytechnique, 1997.

[3] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[4] P. Colmez – *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2009.

[5] J. Faraut – *Calcul intégral*, Belin et Espaces34, 2000.

[6] E. Freitag & R. Busam – *Complex analysis*, second éd., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[7] J.-P. Kahane – « Une formule de Fourier sur les nombres premiers », *Gaz. Math.* **67** (1996), p. 3–9.

[8] S. Lang – *Complex analysis*, Graduate Texts in Math., vol. 103, Springer-Verlag, 1993, Troisième édition.

[9] D. J. Newman – « Simple analytic proof of the prime number theorem », *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), p. 693–696.

[10] R. Remmert – *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.

[11] F. Rouvière – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.

[12] C. Sabbah & N. Berline – *La fonction zêta*, Journées X-UPS 2002, Éditions de l'école polytechnique, 2003.

[13] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[14] E. T. Whittaker & G. N. Watson – *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.