ARCS-EN-CIEL, SOUCOUPES VOLANTES, TOUPIES, COURBES ELLIPTIQUES, ET TOUT ÇA

par

Michèle Audin

Comment j'ai préparé cet exposé

J'ai commencé par ne pas répondre « non » quand Paul-Louis Hennequin m'a demandé si je viendrais à Saint-Flour faire un exposé à des professeurs de mathématiques. Puis, en mai 2004, l'échéance approchant, j'ai eu la surprise de me voir demander par mon ami et collègue Gilles Godefroy et dans un wagon de métro bondé de la ligne 9, si je venais bien à Saint-Flour, oui, et qu'est-ce qu'il faut faire, ben, ils aiment bien qu'on leur raconte des trucs qu'ils peuvent utiliser après, dans leurs classes, pour faire des problèmes pour leurs élèves, ah, non, je ne ferai pas ça. Et puis, en juillet, Paul-Louis m'a demandé un résumé, et je lui en ai envoyé un, dans lequel j'expliquais surtout, de façon incontestablement (et inutilement) agressive que, ce que j'allais raconter, ça ne servirait à rien et surtout pas à faire des sujets de problèmes ou d'examen.

Et enfin, il a fallu le préparer, l'exposé, alors je me suis demandé pourquoi j'étais aussi négative par rapport à cette proposition.

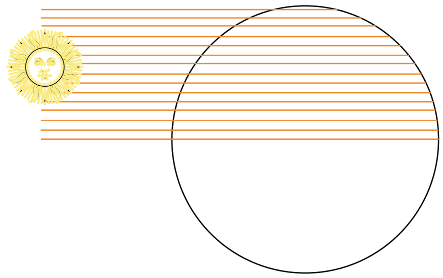
J'ai réfléchi à l'expérience que j'avais des conférences, disons, « grand public ». Et j'ai préparé l'exposé qui fait l'objet du présent article et que j'ai effectivement « prononcé » à Saint-Flour à partir des notes de deux de ces conférences précédentes. Le texte lui-même raconte cet exposé, c'est-à-dire qu'il contient les figures présentées à Saint-Flour, ce que j'y ai dit, mais qu'il inclut aussi des commentaires qui font référence aux discussions nombreuses et très instructives qui ont émaillé la semaine.

1. Mise en jambes, un exposé pour l'APM à Strasbourg en 1988

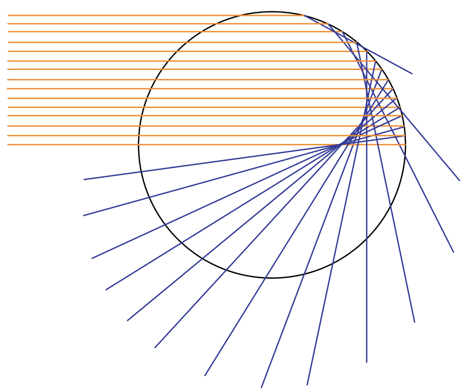
Je suis arrivée à Strasbourg en 1987, j'étais jeune et enthousiaste. J'ai donc évidemment accepté quand on m'a demandé de faire un exposé pour les professeurs de mathématiques, d'autant plus que j'avais un bon sujet, un théorème de mathématiques, un vrai théorème, démontré par un jeune collègue russe, Chekanov, et que l'on pouvait raconter, présenter, en termes de soucoupes volantes...

L'exposé que j'ai effectivement fait était plus technique que ce que l'on va lire ici (mais j'étais plus jeune et moins expérimentée), on pourra se reporter à la rédaction que j'en ai donné à l'*Ouvert* [**2**]. Voilà, en gros, ce que j'ai montré (à défaut de *dé*montrer quoi que ce soit).

Un cœur dans un bol. Ce titre poétique est dû à Myriam Audin que je remercie à nouveau pour son aide. Myriam, donc, prenait son petit-déjeuner (ça n'a pas d'importance) dans un bol (ce qui compte, c'est que le récipient soit « rond ») au soleil (ça, c'est vraiment important). Pour reproduire l'expérience, mettez-vous au soleil avec une tasse de café par exemple. Le soleil envoie des rayons (parallèles, il est loin, le soleil) se réfléchir contre la paroi de la tasse. Chaque rayon est réfléchi, en effet (et en application de la loi de Snell ou de Descartes) et, comme on le voit sur la figure suivante,



l'ensemble des rayons réfléchis « enveloppe » une courbe(1), cette courbe a la forme d'un cœur (on n'en voit que la moitié sur la figure qu'il faut compléter par une symétrie par rapport à la direction horizontale).



Comme le remarque Ian Stewart dans la remarquable BD [**14**], qu'il serait idiot (et donc coupable) de ne pas citer ici, je n'ai dessiné *que* des droites et, si vous voyez la courbe que je n'ai *pas* dessinée sur cette figure, c'est parce qu'il y a concentration de l'encre le long de cette courbe. Dans le cas du bol de Myriam, il y a concentration de l'intensité lumineuse le long du cœur. Concentration de l'intensité lumineuse, ça brûle... et c'est ce que veut dire le mot « caustique » qui décrit l'ensemble des phénomènes dont il est question dans cette mise en jambes.

Il est facile de décrire la courbe par des équations paramétriques, c'est un exercice classique, repris par exemple dans le chapitre VII de [**5**]. Cette courbe est un arc de *néphroïde*, courbe ainsi nommée parce que sa forme évoque celle d'un rein — ce qui prouve que Myriam n'avait pas tout à fait raison(2).

Remarque. Les caustiques sont des exemples de « singularités lagrangiennes » — je ne vais pas expliquer ce que c'est et il n'est pas nécessaire de le savoir pour continuer à lire ce que j'écris(3). C'est une

(1)Ce joli mot, qui évoque un mouvement d'enveloppement, est aussi le terme mathématique qui dit que l'ensemble des droites que nous considérons ici est l'ensemble des tangentes à une certaine courbe, l'enveloppe.

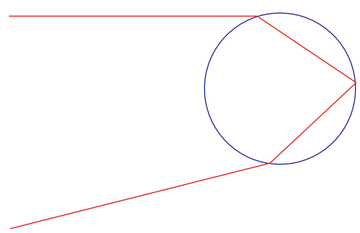
(2)La néphroïde appartient, tout comme la *cardioïde*, qui est la courbe à laquelle les mathématiciens reconnaissent, officiellement, la forme d'un cœur, à la grande famille des courbes cycloïdales (sous-famille des épicycloïdes), c'est dire que l'on peut aussi les décrire comme lieux d'un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur un cercle (voir par exemple [**5**]).

(3)Contrairement à l'usage répandu dans les articles de recherche, les traités et les manuels (et repris, de façon mécaniste et irréfléchie dans les revues de vulgarisation), dans un article destiné à un « grand public », il n'est pas indispensable de définir tous les objets de façon complètement explicite pour pouvoir en parler. J'ajouterai, en pensant en particulier au présent texte, que l'on peut espérer trouver des choses à comprendre à la ligne $n + 12$ même quand on s'est senti largué(e) à la ligne n.

théorie qui englobe la théorie des singularités de fonctions et donc des objets très médiatisés il y a vingt ou trente ans sous le nom de *catastrophes* et fait référence aux travaux de Thom (catastrophes) et à ceux d'Arnold (singularités lagrangiennes).

Un arc-en-ciel dans mon cœur. J'ai déjà utilisé (toujours dans [**5**]) cette belle citation du *Lotus bleu* pour faire transition entre la caustique du bol de café et l'arc-en-ciel, dont je vais rappeler maintenant la description classique. Le dispositif expérimental comprend, une fois encore, du soleil. Il faut aussi de la pluie (j'ajoute que l'expérience doit avoir lieu tôt le matin ou assez tard le soir, parce que, si le soleil est trop haut, il n'y aura pas d'arc-en-ciel, comme le savent tous les physiciens et comme, donc, me l'ont fait remarquer Dominique Chandesris et Danielle Dowek — quant aux lecteurs naïfs, ils devraient rapidement comprendre pourquoi).

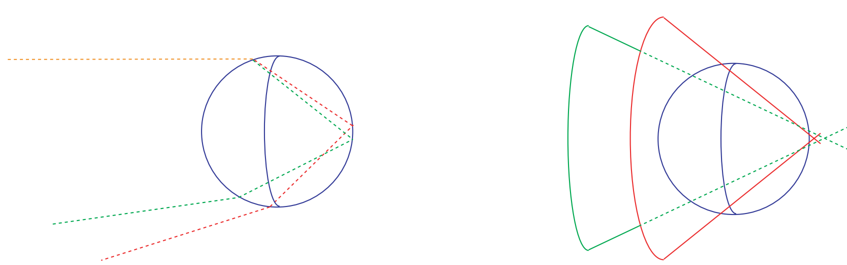
Commençons par un arc-en-ciel monochromatique. Un rayon lumineux est réfracté par la paroi d'une gouttelette d'eau, puis réfléchi et il ressort de la gouttelette, réfracté à nouveau.



Remarque. Certains rayons sont même réfléchis deux fois, ce sont eux qui produisent le deuxième arc-en-ciel que l'on voit parfois à l'intérieur du premier.

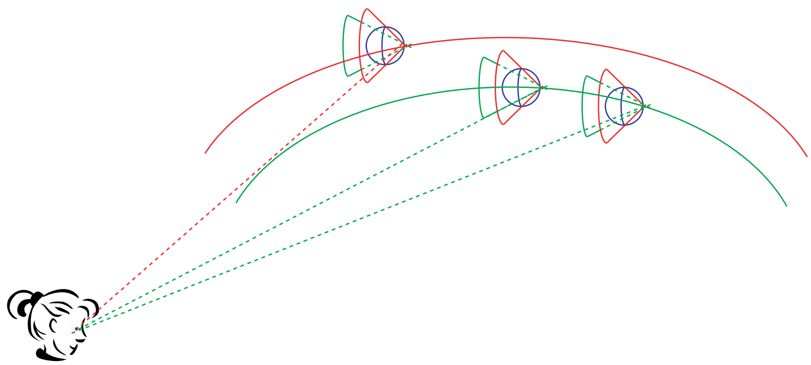
Les rayons sortants enveloppent encore une courbe, une caustique, dont on peut vérifier sans mal qu'elle a une asymptote (si on se place à deux dimensions, comme sur la figure ci-dessus) ou plus exactement (en utilisant la symétrie de rotation pour passer en dimension 3) un cône asymptote. Je me contente de parler de ces éléments à l'infini parce que le rideau de pluie est loin de nos yeux et que la forme de la courbe importe peu hors de l'infini.

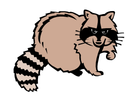
On sait que l'indice de réfraction entre l'air et l'eau ne dépend pas seulement de la nature de ces constituants mais aussi de la longueur d'onde de la lumière. C'est à ce moment que les différentes couleurs de la lumière blanche se séparent (la gouttelette fait office de prisme) et c'est pourquoi l'arc-en-ciel est si beau. La figure suivante montre deux rayons de couleurs différentes et ce qu'il en advient.



Ce sont donc en réalité différents cônes emboîtés correspondant aux différentes couleurs que nous renvoie chaque gouttelette d'eau.

L'ensemble des points du plan (que constitue le rideau de pluie) d'où l'un des rayons, disons rouge, issu de la gouttelette située en ce point pénètre notre œil est un arc de cercle, comme le montre la figure suivante. On peut donc dire que l'arc-en-ciel est une manifestation de l'existence de caustiques (même s'il n'est pas à proprement parler une caustique).





Et les soucoupes volantes ? La forme représentée sur la figure suivante est, elle aussi, une singularité lagrangienne (je rappelle que le lecteur n'est pas sensé savoir ce qu'est une singularité lagrangienne). Ce qui la met dans la même catégorie que la caustique de la tasse de café et que les courbes produisant l'arc-en-ciel. Ici on voit un aspect de l'intérêt qu'il peut y avoir à créer une théorie mathématique abstraite, traitant de manière assez unifiée des objets assez différents.

C'est ce qui avait suggéré à l'astrophysicien Zeldovitch, dans les années quatre-vingt du siècle dernier, une explication du phénomène des OVNI. On accepte de croire que ceux qui disent avoir vu une soucoupe volante ont effectivement vu quelque chose, mais on se souvient que nos yeux sont susceptibles de voir différents objets, dont certains, comme les caustiques dont j'ai parlé plus haut sont créés par la manière dont la lumière se propage et par la façon dont notre œil fonctionne. Zeldovitch imaginait donc un dispositif optique naturel (nuages, air chaud, par exemple) qui produise une caustique en forme de soucoupe volante, celle qui est dessinée ici.

Mais voilà. Les caustiques de l'optique géométrique ne forment qu'une sous-classe des singularités lagrangiennes et ce que Chekanov avait démontré, un ou deux ans avant que je raconte ça pour la première fois, c'est (un « vrai » théorème qui implique) que la soucoupe volante n'est pas une caustique de l'optique géométrique : le mystère des OVNI reste entier...

Pause

Dans l'exposé fait à l'époque, je l'ai dit, il y avait de la technique. Je crois bien avoir expliqué ce qu'était une singularité lagrangienne, sans doute très vite et, sans doute par excès d'enthousiasme sur un si beau sujet, en m'excusant de raconter des choses trop difficiles pour mon auditoire... en répétant que c'était très facile ! Ce qui n'arrangeait rien. Nous avons déjà tous subi ça, des exposés auxquels nous ne comprenions rien et dont on nous expliquait que c'était au niveau DEUG première année, voire pour élèves de terminale.

Il n'est donc pas très étonnant que le public n'ait pas beaucoup réagi, ce qui m'avait beaucoup fâchée (peut-être que c'était trop dur, mais j'étais enthousiaste et j'avais beaucoup travaillé), pas beaucoup réagi, sauf pour me demander les équations paramétriques de la caustique de l'arc-en-ciel (celle qui a l'asymptote, ou le cône asymptote), « comme ça je pourrai la faire étudier à mes élèves ».

Par pitié, non ! Les courbes, celles qui sont belles, intéressantes pour les élèves, instructives, vous les connaissez déjà. Celle-là, elle est un peu pénible, elle n'est pas jolie, et en plus elle ne sert à rien, la seule chose intéressante, c'est cette asymptote, que l'on voit assez vite sans avoir à faire tous ces trucs compliqués qu'on faisait faire aux élèves sur les courbes paramétriques (et dont j'espère qu'on ne le leur fait plus faire maintenant que n'importe quelle calculette un peu évoluée peut faire le plus ennuyeux à leur place).

Je suis revenue à mon point de départ. Alors, ce que je ne veux pas faire dans une promenade, je crois que je l'ai assez bien compris. Ce que je pensais faire, dans celle-ci :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli, montrer des choses que tout le monde (quand je dis tout le monde, je ne veux pas dire un bon étudiant de DEUG, je veux bien dire, tout le monde, peut-être pas tous les petits enfants quand même) est capable de trouver joli. Il n'y a aucun doute que c'est le cas de l'arc-en-ciel.
- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité. L'univers dans lequel, sur lequel travaillent, auquel s'intéressent les mathématiciens, c'est le même que celui dans lequel vivent les « gens » (tous, encore une fois). Il est donc important de montrer des phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée d'aspects différents de la réalité, des idées venues d'un côté peuvent être utilisées d'un autre.

Je reviendrai un peu plus bas sur cette liste, ce « cahier des charges » d'une promenade mathématique.

2. Randonnée à la Réunion, un exposé pour les lycéens

À l'invitation de Dominique Tournès, qui est directeur de l'IREM de la Réunion et fait un énorme travail d'animation dans ce département « ultra-périphérique » (selon la délicate terminologie de la technocratie européenne), j'ai eu l'occasion, en avril 2004, de faire un exposé « grand public » devant des élèves de terminale du lycée Antoine Roussin de Saint-Louis. Je précise que c'est un lycée de construction récente en dehors de la petite ville de Saint-Louis, au sud de l'île, entre les champs de canne à sucre[4]. Un lycée « normal » avec des élèves de terminale normaux (pas l'hypothétique élève de terminale « motivé » à quoi rêvent certains collègues). Un public très intimidant, donc, mais bien sûr surtout très intimidé (surtout après que Dominique leur ait expliqué que j'étais une spécialiste à la réputation internationale (!) venue de métropole pour leur raconter, à eux, des mathématiques).

Et voilà ce que je leur ai raconté (avec des parenthèses ajoutées pour le public de Saint-Flour et les éventuels lecteurs du présent texte).

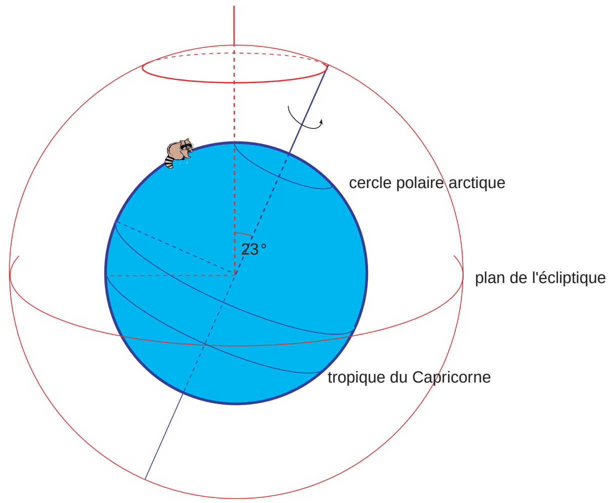
Une toupie. J'ai commencé par sortir ma toupie rouge et par la faire tourner devant eux, plusieurs fois, en expliquant ce qu'il « fallait regarder ».

Que d'abord, on fait semblant de croire que le point (appelons-le O) sur lequel la toupie repose sur le plan horizontal est fixe. Et que donc, l'autre extrémité de son axe est astreinte à se mouvoir sur une sphère de centre O.

Que bien sûr, il y a un mouvement de rotation autour de l'axe.

[4] Contrairement à ce que je croyais, le « sucre Saint-Louis » n'a rien à voir avec Saint-Louis de la Réunion.

Mais que ce n'est pas tout, il y a aussi un mouvement de précession. Ça, on le voit bien, sur la vraie toupie (je la relance). Et pour bien expliquer ce qu'est ce mouvement de précession, pour l'illustrer, je leur montre une autre toupie.



Si j'ai fait cette figure, c'est aussi parce que je suis bien contente d'être là, presque juste sur le Tropique du Capricorne, un endroit, je leur explique, où l'on peut avoir le soleil exactement au-dessus de la tête, alors qu'à Strasbourg, ça n'arrive jamais. Après la précession des équinoxes, je mentionne le fait que, peut-être, ces tropiques que je viens de définir, n'ont pas toujours été à une latitude de 23 degrés. Et c'est ce mouvement de *nutation* que je veux leur montrer sur la toupie.

Une parenthèse. Quel rapport, me demandera-t-on, entre toupies et caustiques ? Eh bien voilà : les caustiques sont des singularités lagrangiennes, ce qui en fait un rameau d'une branche des mathématiques appelée la géométrie symplectique. Quant aux toupies, leur mouvement est décrit par la physique et les équations de Hamilton (voir par exemple le livre [**1**] d'Arnold, encore lui), et comme on ne va pas croire que c'est un article sérieux sinon, je rappelle à ceux qui le savaient et j'informe les autres que ce qu'on appelle ainsi, c'est un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

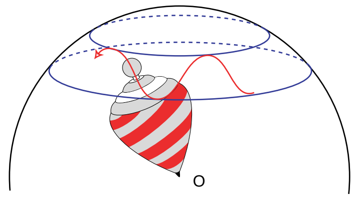
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

ce qui en fait aussi un rameau, à vrai dire un peu plus qu'un simple rameau, de la géométrie symplectique.

En d'autres termes, deux champs physiques apparemment très différents, l'optique géométrique et la mécanique conservative, sont décrits par un même langage mathématique, la géométrie symplectique. Je n'ai pas l'intention de définir ici ce qu'est la géométrie symplectique (je ne vois pas l'intérêt de terroriser les lecteurs ou les auditeurs en essayant d'expliquer pourquoi le bon endroit dans lequel je travaille est une variété-différentielle-munie-d'une-2-forme-différentielle-fermée-non-singulière, comme ont absolument tenu à le faire les journalistes qui sont les vrais auteurs de l'article [**8**]), il me semble plus intéressant de dire ce que je viens de dire, c'est un domaine qui est pertinent pour décrire, étudier, comprendre, à la fois les deux rameaux dont j'ai parlé. Et en particulier, le raton-laveur qui accompagne quelques-unes des figures ne devrait pas être là : nous ne sommes pas dans un inventaire à la Prévert, mais dans un exposé sur les phénomènes de la géométrie symplectique. Jusqu'à maintenant. Ensuite, on va glisser vers l'arithmétique.

La nutation expliquée par une courbe elliptique. Je reviens donc à la nutation de ma toupie, la partie du mouvement qui, dans l'analogie avec la Terre, fait « bouger » les cercles polaires et les tropiques. Je vais expliquer que l'extrémité de l'axe de la toupie est confiné entre deux cercles parallèles de la sphère sur laquelle se meut cette extrémité, comme le montre la figure suivante.

Je donne donc un nom, x, à la « cote » (on aura deviné que je préfère le mot latitude) de cette extrémité. Et je veux donc montrer que x varie entre deux nombres a et b, les latitudes des parallèles représentés sur ma sphère. Cette quantité x dépend du temps, c'est de sa variation par rapport au temps que nous parlons.



À cet endroit de l'exposé, il y a une boîte noire, les équations de la mécanique, le fait que l'énergie totale est supposée constante, que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution est, lui aussi, constant, et cette sorte de considérations, et de cette boîte noire sort une équation différentielle qui exprime la dérivée de x par rapport au temps[(5)], et qui est de la forme

$$\dot{x}^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

où A, B, C sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et des quantités conservées dont j'ai entamé la liste ci-dessus (comment on a lancé la toupie, sa masse, etc.).

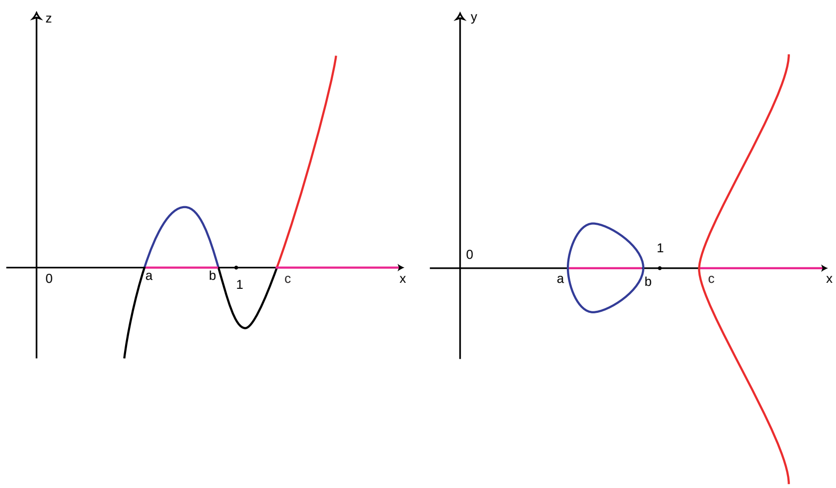
Comme cette équation est un peu compliquée quand on y pense comme à une équation différentielle, on va oublier que c'en est une en posant $y = \dot{x}$ et en y pensant comme à l'équation

$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

d'une courbe plane. Ça a pris un peu plus de temps avec les lycéens, mais, en gros, j'ai dessiné d'abord le graphe du polynôme de degré 3

$$z = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

puis la courbe qui nous intéresse elle-même.

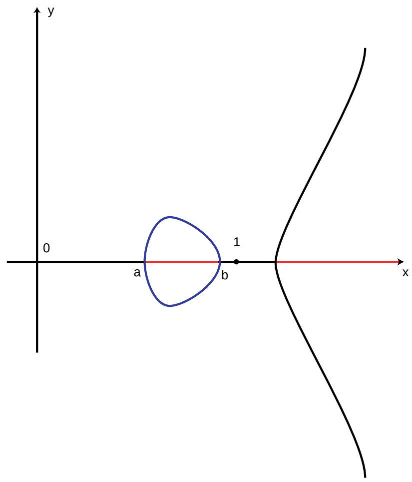


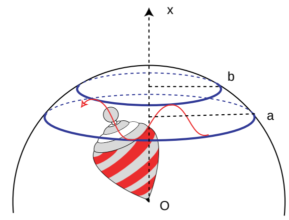
Je ne l'ai pas expliqué aux lycéens, je l'ai seulement signalé, mais mes lecteurs peuvent comprendre que, comme la toupie bouge, en effet, bouge vraiment, bouge *réellement*, eh bien il y a des valeurs de x entre 0 et 1 (bien sûr, 1 est la longueur de l'axe et le rayon de la sphère) pour lesquelles mon équation a des solutions, en d'autres termes mon polynôme a bien un graphe comme celui que j'ai dessiné, il a deux racines réelles entre 0 et 1 et une plus grande que 1. Et ma courbe a deux composantes connexes.

Et ça décrit bien ce que j'avais annoncé.

Remarque. Je n'ai pas écrit « théorème », ni « démonstration », mais j'ai bien montré (et même démontré) quelque chose, j'ai démontré en particulier que, comme je l'avais annoncé sur l'une des figures, l'extrémité de l'axe de la toupie devait osciller entre les latitudes a et b. Mais, la démonstration que j'ai donnée n'est pas complète dans la mesure où je n'ai pas fait le calcul complet amenant à l'équation de la courbe.

[(5)] Ce n'est pas *très* difficile, mais ce serait un peu long et surtout hors-sujet, de le faire ici. On trouvera le calcul complet dans [**3**], un autre article écrit pour les professeurs et qui contient aussi une partie des choses que je raconte ici.





Deuxième parenthèse. C'est le moment de revenir sur le cahier des charges d'une telle promenade. En commentant l'exposé sur les caustiques, j'avais relevé un certain nombre de points, pour mémoire :

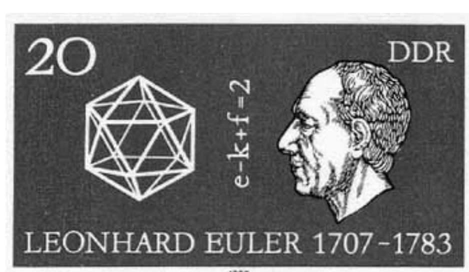
– joli (j'espère que ça l'est encore)
– phénomènes (oui)
– vision unifiée (ici on va aller de la mécanique à l'arithmétique).

Mes exigences se sont accrues, pas seulement parce que je suis devenue plus sage, mais aussi grâce à Juliette Sabbah, qui m'a incitée à côtoyer de près quelques manuels de mathématiques de collège. J'ai ajouté deux points à mon cahier des charges :

– Les mathématiques sont une activité humaine, c'est à dire faite par des êtres humains, des gens comme vous et moi, des jeunes, des vieux, des hommes, des femmes, et pas que des barbus de deux millénaires comme ceux que l'on trouve dans les manuels de collège.
– Dans un exposé de mathématiques, il faut présenter quelque chose qui s'appelle démonstration, c'est-à-dire une démonstration complète de quelque chose de relié à l'exposé.

Des mathématiciens. Les mathématiciens les plus célèbres ayant travaillé sur le mouvement d'un corps solide avec un point fixe dans un champ de gravitation constant (dont celui de la toupie est un cas particulier) sont

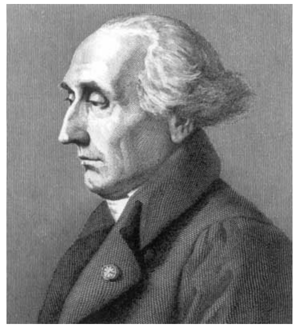
– Euler, au XVIII^e^ siècle. On le voit ici représenté avec un icosaèdre, polyèdre régulier à vingt faces triangulaires, et avec la relation entre les nombres de faces, arêtes, sommets d'un polyèdre convexe qui porte son nom.



Du point de vue qui nous intéresse, Euler a étudié le solide en question dans le cas où le point fixe coïncide avec son centre de gravité.

– Toujours au XVIII^e^ siècle mais un peu plus tard, Lagrange. Lagrange est complètement responsable du cas de la toupie (un solide avec un axe de révolution) que certains appellent parfois « toupie de Lagrange ».

Deux remarques sur Lagrange. D'abord, au cours de son étude de la toupie, il a eu à utiliser la matrice d'inertie de cet objet, une matrice symétrique qui décrit la forme du solide ; du coup, dans le cours de son étude, il a démontré (et est sans doute un des premiers à l'avoir fait) qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée. Ensuite, il est un des inventeurs de la géométrie symplectique (voir [**8**]).



– Enfin, dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, Sophie Kowalevski (car c'est ainsi que la mathématicienne russe Sonia Kovalevskaya a elle-même choisi d'écrire son nom sur le long article en français [**12**] qu'elle a publié sur le sujet (dans une revue suédoise !)).

C'est elle qui a compris l'intérêt d'utiliser l'analyse complexe pour étudier ce genre de problème. Dans l'article cité, elle a mis en évidence des propriétés du mouvement du solide en question qui ne sont vérifiées que dans les cas déjà considérés par Euler et Lagrange ainsi que dans un autre cas, plus mystérieux et qui porte désormais le nom de « toupie de Kowalevski ». Il y aurait énormément de choses passionnantes à dire sur les mathématiques contenues dans cet article révolutionnaire (pour des articles et ouvrages spécialisés, je renvoie à [**9, 4**] et à [**7, 6**] et aux références que ceux-ci contiennent).

Il y a aussi beaucoup de choses à dire sur Sophie Kowalevski qui a eu une vie romanesque (ne serait-ce que parce qu'elle a, en particulier, écrit un roman [**11**], dont une traduction en français vient d'être publiée) et surtout très courte, puisqu'elle est morte à quarante ans d'une pneumonie. Voir [**10**].

La courbe elliptique est un groupe. Une courbe d'équation

$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

est un objet que les mathématiciens appellent une « courbe elliptique » (au moins quand le polynôme du troisième degré qui figure au second membre n'a pas de racine multiple). Ce nom peut paraître étrange (après tout, une ellipse est un objet de degré 2) mais il est justifié par le fait que ce type de courbe apparaît quand on essaie par exemple d'exprimer la longueur d'un arc d'ellipse.

Remarque. Ce que nous avons fait en remarquant que la courbe elliptique issue des équations du mouvement de la toupie avait deux composantes connexes, c'est de la géométrie « algébrique » (ce qui veut dire que l'équation est un polynôme) réelle (ce qui veut dire que nous avons regardé des couples de points (x, y) *réels* satisfaisant à cette équation).

Il se trouve que, en plus d'être utiles pour modéliser une partie du mouvement d'une toupie, les courbes elliptiques ont des propriétés très intéressantes du point de vue de l'arithmétique. C'est ce que je vais évoquer maintenant. D'abord, elles partagent avec beaucoup d'autres ensembles la jolie propriété d'être un groupe.

Les structures algébriques ont beau avoir complètement disparu de l'enseignement secondaire, les élèves utilisent des groupes sans le savoir et rien ne m'empêche de le leur dire. Ils connaissent toutes les propriétés qui font de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, avec son addition, un groupe commutatif, pour mémoire :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

les nombres relatifs s'ajoutent et l'on sait que

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

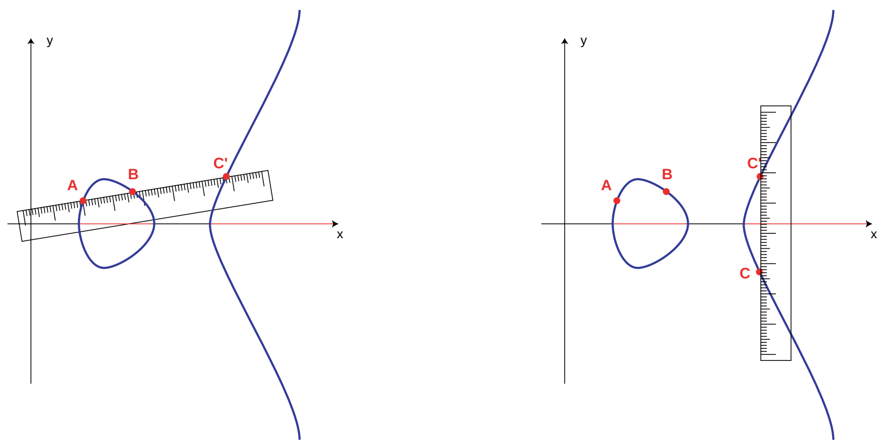
que 0 est « neutre », c'est-à-dire que

$$a + 0 = a,$$

et que l'on a toujours

$$a + (-a) = 0.$$

Eh, bien, avec les points de la courbe elliptique, on peut faire quelque chose d'analogue : à deux points A et B, on peut associer un troisième point C de la façon suivante :



On trace la droite AB. Elle rencontre la courbe en un troisième point C' (parce qu'une équation de degré 3 qui a deux racines en a toujours une troisième). Le point C recherché est le symétrique de C' par rapport à l'axe des x.

Je pose

$$C = A + B$$

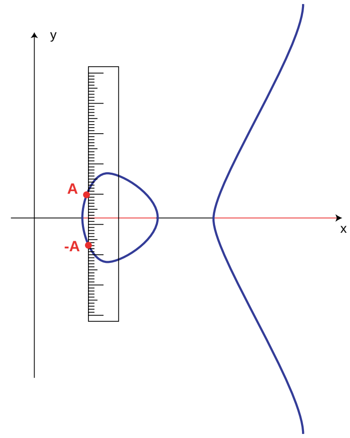
et j'ai ainsi défini une « addition » sur ma courbe. Eh bien, elle a les mêmes propriétés que l'addition des nombres entiers, ce qui s'exprime en disant que la courbe elliptique est un « groupe » (commutatif).

Pour démontrer ce fait, il faut commencer par remarquer que ce que j'ai écrit jusque là n'est pas absolument vrai. Il y a des droites qui ne rencontrent la courbe qu'en deux points. Ce sont les droites parallèles à l'axe des y et ça correspond au fait que trouver l'intersection d'une droite et de la courbe revient à résoudre une équation de degré 3... sauf pour ces droites-là, qui donnent lieu à une équation de degré 2. Comme ni mes lecteurs ni moi n'aimons les exceptions, décidons d'ajouter un point à la courbe, un point qui sera à la fois sur la courbe et sur toutes les droites « verticales », qu'il est de tradition d'appeler ∞ (parce que c'est un « point à l'infini ») mais qu'il est plus sage ici d'appeler 0. Et ce point vérifie bien

$$A + 0 = A$$

quelque soit le point A : c'est, comme le montre la figure, dire que le symétrique du symétrique de A est A. Et d'ailleurs, le symétrique de A mérite de s'appeler $-A$ puisque, quand on l'ajoute à A, on trouve 0.

On peut s'amuser et remarquer (et nous l'avons fait à Saint-Flour) que les points d'ordre 2 de ce groupe sont les points où la courbe rencontre l'axe des x, ou encore (et nous ne l'avons pas fait, mais nous aurions pu le faire) dire que les points d'ordre 3 sont les points d'inflexion de la courbe.



Remarque. Ce que ne m'ont pas demandé les lycéens de Saint-Louis, qui ont suivi très sagement et, m'a-t-il semblé, très attentivement, toutes ces considérations abstraites, c'est pourquoi cette addition était associative. Je n'ai pas soulevé la question avec eux, parce que je n'en avais pas le temps, il me restait des choses plus intéressantes à discuter avec eux. Bien sûr, à Saint-Flour, il y avait dans la salle des auditeurs qui « savaient » et, bon, nul n'est parfait, dans ce milieu, quand on sait quelque chose que tous les autres ne savent pas, on a envie que ça se sache. Donc, j'ai dû discuter la question de l'associativité. Démontrer l'associativité avec des sécantes à la courbe, on peut le faire. Cette démonstration n'est pas très difficile, mais elle est trop fastidieuse[6] pour un exposé de ce genre, d'autant plus qu'elle n'apporte aucune idée intéressante. Ce qui est vraiment intéressant, c'est en utilisant la fonction $\wp$ de Weierstrass, de montrer que la courbe (complexe) est en bijection (biholomorphe) avec un tore (complexe) $\mathbf{C}/\Lambda$ (où Λ est un réseau) et (c'est un théorème d'Abel) que l'addition définie sur la courbe par sécantes correspond, via cette bijection, à l'addition provenant de celle des nombres complexes... et voilà pourquoi votre fille est associative. C'est une démonstration qui ouvre sur de vraies mathématiques, significatives, vers Riemann, etc. Pour fixer le niveau de difficulté, le théorème d'Abel est quelque chose que j'aime bien donner comme sujet de mémoire à des étudiants de maîtrise un peu éveillés (d'aucuns diraient « motivés »). Alors voilà, cette structure de groupe (et l'identification avec le tore complexe) donne aussi des informations intéressantes mais abstraites sur le mouvement de la toupie. Je ne peux pas en parler ici, c'est trop compliqué.

Par contre, ce dont je vais parler, c'est du fait que les courbes elliptiques, en plus de servir à calculer l'arc d'une ellipse, en plus de permettre de résoudre les équations du mouvement de la toupie et d'autres en mécanique, les courbes elliptiques sont un objet assez universel en mathématiques, puisqu'elles servent aussi à faire de l'arithmétique.

Le théorème de Fermat. Il s'agit bien du très célèbre problème posé par Fermat au XVII$^{\text{e}}$ siècle. Peut-on trouver des nombres entiers a, b, c et n tels que

$$a^n + b^n = c^n?$$

[6] Comme le dit élégamment Serge Lang, dans l'exposé (oral !) rédigé dans [**13**], « si vous voulez vérifier l'associativité, vous pouvez toujours courir. Si vous essayez par la force brutale, vous n'y arriverez pas. Mais c'est vrai ! » Et du coup, il ne le démontre pas, bien entendu !

Oui, on peut, bien sûr, et voilà plein d'exemples :

– $n = 1$, a et b quelconques, $c = a + b$...
– n quelconque, $b = 0$, $a = c$... on appelle ça une solution « triviale »,
– $n = 2$, par exemple $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $3^2 + 4^2 = 5^2$... c'est le célèbre « triangle-3-4-5 » qui remplit tous les exercices et tous les exemples de tous les livres de troisième, non ce n'est pas tout à fait vrai, il y en a d'autres...
– L'équation est homogène (n fixé), si a, b et c sont solutions, alors ka, kb et kc sont solutions aussi. En particulier, avec $n = 2$, on trouve tous les autres triangles rectangles des exercices sur le théorème de Pythagore dans les livres de troisième, 60-80-100, etc...
– ou (avec $n = 2$), $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$,

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

(on m'a prétendu que l'on trouvait parfois le triangle correspondant dans certains livres) ou...

C'est là que j'ai fait aux élèves une vraie démonstration, une démonstration complète, de quelque chose de simple et de facile, que tous pouvaient suivre. La voici : On remarque que

$$(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1.$$

On part donc de n'importe quel nombre impair k, de sorte que k^2 est aussi un nombre impair, que l'on peut donc écrire $k^2 = 2m + 1$. Mais alors

$$k^2 + m^2 = (m + 1)^2$$

et il y a une infinité de triangles rectangles différents (non semblables) dont les côtés sont des nombres entiers[7].

Je suis d'accord que ce n'était peut-être pas très sérieux, mais bon, c'est agréable, dans un exposé, quand il y a un endroit que l'on comprend bien, non ?

Mais revenons à Fermat, qui a fait travailler énormément de gens, que je ne vais pas citer tous, bien sûr, Euler, encore lui ($n = 3$),

et Gauss, le prince des mathématiciens, comme on l'appelait, représenté ici avec une gaussienne (à Saint-Flour, qui, en plus d'être le lieu où se tiennent les universités d'été d'*Animath*, est celui d'un célèbre séminaire de probabilités, il fallait bien ça), et même une princesse, Sophie Germain, alias Monsieur Leblanc, dont on voit ici la statue, une vie très romanesque elle aussi, et les autres, Kummer, qui, ma foi, sur son chemin de Fermat, a inventé les idéaux et encore, plus récemment, Taniyama, du romanesque encore, cette fois, c'est pourtant un homme, Shimura, et on m'a reproché à Saint-Flour de ne pas avoir cité Weil, bien sûr, et tant d'autres...

Fermat et les courbes elliptiques. Si A, B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat, c'est-à-dire si

$$A^n + B^n = C^n,$$

alors la courbe elliptique d'équation

$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^nB^n$$

a des propriétés si particulières que... elle ne peut pas exister ! (Wiles).

[7] Voir aussi [**13**].

Démontré par Wiles en 1994, le « grand théorème de Fermat » affirme que, pour $n \geq 3$, la seule solution (en nombres entiers) est $a = 0$ et $b = c$ (ou $b = 0$ et $a = c$).

J'ai terminé l'exposé en montrant la célèbre photo de Wiles qui suit

et en demandant aux élèves quelle différence il y avait entre cette photo et les autres portraits de mathématiciens que j'avais montrés auparavant. Étonnamment, les élèves n'ont pas donné la réponse que j'attendais... mais à Saint-Flour, les collègues l'ont tous trouvée immédiatement. Comme quoi le bonheur (en mathématiques) est — encore aujourd'hui[8] — une idée (bien répandue chez les mathématiciens mais) neuve.

Remerciements

Je remercie Paul-Louis, Gilles, Danielle, Dominique C., Dominique T., Myriam et Juliette déjà nommés et avec eux tous les élèves de Saint-Louis et tous les participants de Saint-Flour, notamment Martin Andler et les deux Pierre (Audin et Duchet) et surtout Christine Marcel pour ses commentaires décapants qui m'ont beaucoup aidée dans la rédaction du présent texte.

Note sur la bibliographie

Il y en a pour tous les goûts... Les articles parus dans l'*Ouvert* sont en principe lisibles par les enseignants. L'article paru dans *la Recherche* n'est pas vraiment bon, pour des raisons que j'ai évoquées dans le texte, mais il est extrêmement bien illustré. Il faut lire la BD si on la trouve (à part le *Géométricon*, c'est ce que j'ai vu de mieux dans le genre). Le compte-rendu de la conférence de Lang au Palais de la Découverte est toujours très agréable à lire (même si certaines affirmations provocatrices sont discutables). Le roman de Sophie K. n'est sûrement pas ce qu'elle a écrit de mieux. Le livre de Géométrie n'est pas si mal. Les autres articles et ouvrages cités sont spécialisés, lisibles par des mathématiciens plus ou moins spécialistes et sont surtout là pour montrer que ce dont je parle ici, c'est bien de mathématiques vivantes.

[8] Ce qui me permet, après Saint-Flour et Saint-Louis, de citer un saint laïque, Saint-Just...

Références

[1] V. I. Arnold – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

[2] M. Audin – « Soucoupes volantes et caustiques (avec point de vue sur l'arc-en-ciel) », *l'Ouvert* **54** (1989), p. 1–10.

[3] ______, « De la toupie aux courbes algébriques », *l'Ouvert* **67** (1992).

[4] ______, *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.

[5] ______, *Géométrie*, Espaces34 et Belin, 1998.

[6] ______, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, vol. 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.

[7] ______, « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001, Astérisque* **282** (2002), p. 113–135.

[8] M. Audin & P. Iglésias – « La géométrie symplectique », *la Recherche* **271** (1994), p. 1246–1252.

[9] M. Audin & R. Silhol – « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153–229.

[10] J. Détraz – *Kovalevskaïa : l'aventure d'une mathématicienne*, Belin, Paris, 1993.

[11] S. Kovalevskaïa – *Une nihiliste*, Phébus, Paris, 2004.

[12] S. Kowalevski – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.

[13] S. Lang – « Une activité vivante : faire des mathématiques », *Rev. Palais Découv.* **11** (1983), p. 27–62.

[14] I. Stewart – *Oh ! catastrophe*, Belin, 1982.

Version du 9 septembre 2004

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • *E-mail :* `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`
Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`