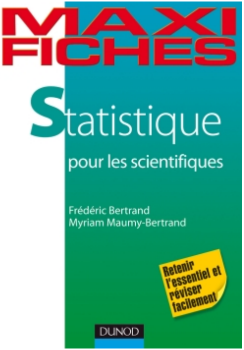
Étude de cas

Myriam Maumy-Bertrand

IRMA, UMR 7501, Université de Strasbourg

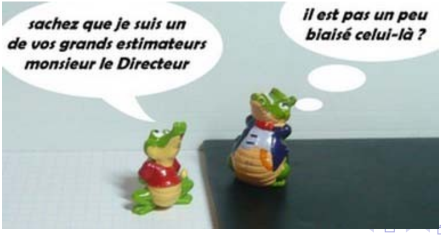
27 septembre 2013

Ce chapitre s'appuie essentiellement sur le livre :



$2^{\text{ème}}$ partie

Théorie de l'estimation



Sommaire

- **Le problème de l'estimation** est l'impossibilité de connaître exactement la valeur d'un **paramètre inconnu** noté θ. Ce problème est très général et a des aspects distincts.
- Les observations, par exemple obtenues à partir d'une méthode d'échantillonnage, permettent de construire **une estimation de** θ. Nous supposerons que chaque observation est la valeur d'une variable aléatoire X dont la loi dépend de θ. Cela revient ainsi à doter l'**état de la nature** inconnu d'un **modèle probabiliste**. Ce dernier est complété par un **modèle d'échantillonnage** décrivant la manière dont les observations sont recueillies.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 108.

Hypothèses

Nous nous plaçons dans le cas le plus simple :

> Les n observations constituent un **échantillon aléatoire** composé de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (ce que nous noterons i.i.d.) $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Définition

Un **modèle probabiliste** *complété par un* **modèle d'échantillonnage** *est ce que nous appelons un* **modèle statistique***.*

Voir le livre « Maxi Fiches », page 109.

Le problème :

Comment pouvons-nous estimer θ à partir de n observations $\{X_1, \ldots, X_n\}$ formant un **échantillon aléatoire** dont les valeurs sont notées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ formant un **échantillon** ?

Deux problèmes :

Cette question recouvre deux problèmes :

1. Définir un estimateur possédant de bonnes qualités.
2. Trouver la manière adéquate de le choisir.

Nous allons évoquer ces deux questions successivement dans les paragraphes suivants.

Sommaire

Soient :

- θ un paramètre réel **univarié** inconnu défini au sein d'une population U,
- Θ l'ensemble des valeurs possibles du paramètre θ.

Définition

Si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est un échantillon aléatoire d'effectif n prélevé dans la population U, alors nous appelons **estimateur** *du paramètre inconnu θ toute fonction h des n observations, noté $\widehat{\theta}_n$:*

$$\widehat{\theta}_n = h(X_1, \ldots, X_n). \tag{2.1}$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

$\widehat{\theta}_n$ est **une variable aléatoire** de loi de probabilité qui dépend du paramètre inconnu θ.

Définition

Une fois l'échantillon prélevé, nous disposons de n valeurs observées $x_1, \ldots, x_n$, ce qui nous fournit une valeur

$$h(x_1, \ldots, x_n)$$

de $\widehat{\theta}_n$, que nous appelons une **estimation** *du paramètre θ.*

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

- Il est souhaitable de ne pas utiliser uniquement le bon sens ou l'intuition pour choisir entre deux estimateurs.
- Pour pouvoir effectuer le bon choix, nous devons pouvoir les comparer en recourant à des objectifs choisis a priori.
- Nous allons établir une liste de plusieurs propriétés que nous souhaitons retrouver dans un bon estimateur, permettant ainsi de mettre en évidence ceux qui en possèdent sinon le plus grand nombre, du moins les plus importantes.

Sommaire

Toute fonction des observations d'un échantillon aléatoire simple, définie par (2.1), peut permettre d'estimer la valeur du paramètre θ.

Rappel de la définition

Nous appelons **estimation** la valeur observée $h(x_1, \ldots, x_n)$ de l'**estimateur** $h(X_1, \ldots, X_n)$.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

Remarque

La notation couramment utilisée « majuscule pour une variable aléatoire et minuscule pour sa valeur » est en contradiction avec (2.1) et veut que nous distinguons aussi la variable aléatoire $\widehat{\theta}_n$ de sa valeur observée, notée parfois $\widehat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

Pour fixer les idées, et étant donné les difficultés à distinguer variable aléatoire et valeur observée, nous utilisons la notation suivante :

Notation

1. L'échantillon de taille n est désigné par $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. L'échantillon aléatoire de taille n est quant à lui désigné par $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Remarque

Il faudra toujours se poser la question « dans quel cas sommes-nous ? » car cela peut avoir des conséquences, surtout dans les calculs que nous effectuerons.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

Sommaire

Le choix d'un estimateur va reposer sur **ses qualités.**
Comme nous l'avons souligné, il est habituel de comparer des estimateurs entre eux sur base de propriétés plus ou moins intéressantes qu'ils possèdent ou non.

La première propriété

Elle concerne la possibilité de comporter un **biais**.

Il est souvent judicieux que la distribution d'un estimateur soit centrée sur le paramètre inconnu, c'est-à-dire qu'il possède la propriété suivante.
Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

Définition

$\widehat{\theta}_n$ *est un* **estimateur sans biais** *(ou non biaisé) du paramètre* θ *si :*

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \theta. \tag{4.1}$$

Définition

Si l'équation (4.1) *n'est pas vérifiée, le* **biais** *de* $\widehat{\theta}_n$ *se définit par :*

$$B\left(\widehat{\theta}_n\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\theta}_n\right) - \theta. \tag{4.2}$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 110.

Définition

Un estimateur $\widehat{\theta}_n$ est un **asymptotiquement sans biais** *pour le paramètre θ si :*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \theta. \tag{4.3}$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 111.

Pour estimer la moyenne μ de la population U de taille N nous utilisons la moyenne $\widehat{\mu}_n$ que nous allons définir ci-dessous, d'un échantillon aléatoire de taille n ($n < N$).

Rappel

En tant que variable aléatoire, $\widehat{\mu}_n$ constitue un **estimateur** de la moyenne μ de la population U.

Définition

Toute valeur observée de l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ à partir d'un échantillon est appelée une ***estimation*** *de la moyenne μ.*

Voir le livre « Maxi Fiches », page 120.

Hypothèses de travail

Le mode de prélèvement retenu est tel que :

1. les X_i sont des v.a. **indépendantes et identiquement distribuées.**
2. Les X_i vérifient **les deux propriétés suivantes** :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \mathbb{E}(X_i) = \mu \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

Définition

L'estimateur de la moyenne $\widehat{\mu}_n$ d'un échantillon aléatoire de taille n est égal à :

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Calculons l'espérance de $\widehat{\mu}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right) = \frac{1}{n} \times \mu \times n = \mu.\end{aligned}$$

Nous établissons ainsi la propriété suivante :

Propriété

En moyenne, l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ est égal à la moyenne μ de la population U, ou encore $\widehat{\mu}_n$ est un estimateur sans biais de la moyenne μ.

Calculons la variance de $\widehat{\mu}_n$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right), \text{ les } X_i \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2, \text{ les } X_i \text{ sont identiquement distribuées} \\
&= \frac{1}{n^2} \times \sigma^2 \times n = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}
$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 120.

Les questions :

Que signifie statistiquement ce dernier résultat ? Comment le statisticien l'interprète-t-il ?

Les réponses :

- Ce paramètre, destiné à connaître la dispersion des valeurs de $\widehat{\mu}_n$ autour de μ, permet de mesurer **l'erreur d'échantillonnage**.
- Plus la $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right)$ est faible, plus il est probable que l'erreur sera petite et l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ précis.
- La $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right)$ est faible si la variance σ^2 de la population U est petite, ce qui correspond à une population homogène, et/ou si la taille n de l'échantillon est grande.

Remarque

Cette erreur calculée dans le cas d'un échantillon aléatoire ne dépend pas de la taille N de la population U, ce qui n'est pas intuitif ! Savez-vous pourquoi ?

Remarque

En fait, nous avons effectué les calculs avec des variables indépendantes ce qui correspond à un tirage aléatoire avec remise. Lorsque nous calculerons cette erreur dans le cas d'un tirage aléatoire sans remise, la taille N de la population U interviendra !

Définition

L'estimateur de la variance S_n^2 d'un échantillon aléatoire de taille n est égal à :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2.$$

Calculons l'espérance de l'estimateur S_n^2 afin de savoir si S_n^2 est un estimateur sans biais de la variance σ^2 de la population U.
Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

Remarque

Avant de commencer le calcul de l'espérance de l'estimateur S_n^2, il est intéressant de noter que

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \widehat{\mu}_n^2. \end{aligned}$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S_n^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \widehat{\mu}_n^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2\right) - \mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_n^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Var}\left(X_i\right) + \mu^2\right) - \left(\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right) + \mu^2\right) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2, \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\
&= \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Nous constatons alors que

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right) \neq \sigma^2.$$

Ce qui signifie que :

Propriété

S_n^2 est un estimateur biaisé de la variance σ^2 de la population U dont le biais vaut :

$$B\left(S_n^2\right) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

Remarque

$B\left(S_n^2\right)$ tend vers 0 quand la taille n de l'échantillon tend vers plus l'infini.

Remarque

Dans ce cas, S_n^2 est un **estimateur asymptotiquement sans biais** de la variance σ^2 de la population U.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

À partir de cette remarque, nous allons construire un autre estimateur de la variance σ^2 de la population U.

Définition

L'estimateur corrigé de la variance $S^2_{n,c}$ d'un échantillon aléatoire de taille n simple est égal à :

$$S^2_{n,c} = \frac{nS^2_n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2.$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

Nous vérifions aisément, dans le cadre d'un tirage aléatoire avec remise, c'est-à-dire où les X_i sont indépendantes, que :

$$\mathbb{E}\left(S^2_{n,c}\right) = \sigma^2.$$

Propriété

L'estimateur corrigé de la variance $S^2_{n,c}$ d'un échantillon aléatoire de taille n est donc un estimateur sans biais de la variance σ^2 de la population U.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 122.

π_A est une proportion d'individus qui possèdent une caractéristique A dans la population U.

Définition

Nous estimons la proportion π_A par la proportion observée dans un échantillon aléatoire de taille n prélevé dans la population U qui se définit par :

$$\widehat{\pi}_{n,A} = \frac{n_A}{n}$$

où n_A est le nombre d'individus de l'échantillon qui possèdent la caractéristique A.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 121.

Remarque

π_A peut-être considérée comme la moyenne d'une loi de Bernoulli en dotant tous les individus de la population U d'une valeur 1 ou 0 selon que les individus possèdent ou non la caractéristique A.

Ainsi nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{\text{Somme des valeurs 1 + Somme des valeurs 0}}{\text{Taille de la population}} \\
&= \frac{\text{Nombre de 1}}{\text{Taille de la population}} \\
&= \text{Proportion de 1} \\
&= \pi_A.
\end{aligned}
$$

Si nous considérons la moyenne $\widehat{\mu}_n$ de l'échantillon composé de 1 et de 0, alors nous avons :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_n &= \frac{\text{Somme des 1 observés + Somme des 0 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{\text{Nombre de 1 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{n_A}{n}.\end{aligned}$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 121.

Comme

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_n\right) = \mu,$$

nous en déduisons que

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_n\right) = \mathbb{E}\left(\frac{n_A}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\pi}_{n,A}\right) = \mu = \pi_A.$$

Par conséquent, nous pouvons établir la propriété suivante :

Propriété

$\widehat{\pi}_{n,A}$ est un estimateur sans biais de la proportion π_A de la population U.

Voir le livre « Maxi Fiches », page 121.

Maintenant que nous disposons du matériel nécessaire pour faire de l'estimation, nous allons traiter un exemple.

Exemple

Soit la population U de trois enfants d'une famille âgés de 2, 4 et 12 ans. Décidons de prélever un enfant en attribuant à chacun d'eux la même probabilité d'être sélectionné. Nous dotons ainsi la population d'une loi discrète $\{(x, p_x)\}$ définie dans le tableau suivant :

x	2	4	12
p_x	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Suite de l'exemple

L'âge de l'enfant prélevé n'est pas connu. Il constitue donc une variable aléatoire X.

Calculons la moyenne μ et la variance σ^2 de la population U :

- $\mu = 1/3 \times 2 + 1/3 \times 4 + 1/3 \times 12 = 6$
- $\sigma^2 = 1/3 \times (2-6)^2 + 1/3 \times (4-6)^2 + 1/3 \times (12-6)^2 = 56/3.$

Nous pouvons donc écrire :

- $\mathbb{E}(X) = \mu = 6$
- $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = 56/3.$

Suite de l'exemple

Décidons maintenant de prélever deux observations par tirage aléatoire avec remise et à probabilités égales.

Notons X_1 et X_2 les v.a. correspondant à la première et à la seconde observation. Elles admettent toutes deux une distribution uniforme sur l'ensemble des trois valeurs, chaque élément pouvant être choisi avec une probabilité $1/3$.

Après calculs, nous obtenons :

- $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mu = 6$
- $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2 = 56/3$.

Remarques

1. Dans cet exemple, nous savons que la moyenne μ de la population U vaut 6. Mais, de façon générale, lorsque nous étudions la population U, nous ne disposons pas d'une telle information !
2. Les paramètres de la population U sont inconnus (lesquels ?) et nous désirons les estimer.
3. Une façon d'atteindre ce but est d'utiliser l'information donnée par l'échantillon prélevé de la population U.
4. Pour estimer la moyenne μ, il faut penser à calculer la moyenne arithmétique de l'échantillon.

Suite de l'exemple

Introduisons donc :

$$\widehat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Calculons la moyenne $\widehat{\mu}_2$ dans tous les cas :

x_1	x_2		
	2	4	12
2	2	3	7
4	3	4	8
12	7	8	12

Nous observons que $\widehat{\mu}_2$ peut prendre 9 valeurs, chacune avec une probabilité de $1/9$.

Suite de l'exemple

Calculons maintenant « à la main » l'espérance et la variance de $\widehat{\mu}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{\mu}_2\right] &= \frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 2\times 3+\frac{1}{9}\times 4 \\
&\quad +\frac{1}{9}\times 2\times 7+\frac{1}{9}\times 2\times 8+\frac{1}{9}\times 12 = 6 \\
\mathrm{Var}\left[\widehat{\mu}_2\right] &= \frac{1}{9}\times(2-6)^2+\frac{1}{9}\times 2\times(3-6)^2+\frac{1}{9}\times(4-6)^2 \\
&\quad +\frac{1}{9}\times 2\times(7-6)^2+\frac{1}{9}\times 2\times(8-6)^2 \\
&\quad +\frac{1}{9}\times(12-6)^2=\frac{84}{9}=\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Suite de l'exemple

Maintenant calculons la moyenne et la variance de $\widehat{\mu}_2$ d'une autre façon :

- $\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_2\right) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_1 + X_2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)\right) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \mathbb{E}(X_1) = 6$
- $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_2\right) = \mathrm{Var}\left(\dfrac{X_1 + X_2}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]\right) = \dfrac{1}{4} \times 2 \times \mathrm{Var}(X_1) = \dfrac{1}{4} \times 2 \times \dfrac{56}{3} = \dfrac{28}{3}.$

Remarques

Ces résultats permettent d'effectuer deux constatations très intéressantes

1. La moyenne d'un échantillon de taille deux n'est jamais égale à la moyenne $\mu = 6$ de la population U. Mais la variable aléatoire $\widehat{\mu}_2$ est en moyenne égale à $\mu = 6$.
2. La moyenne $\widehat{\mu}_2$ prend des valeurs qui se répartissent autour de $\mu = 6$ avec une certaine dispersion mesurée par $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_2\right) = 28/3$ qui est égale à la moitié de la variance $\sigma^2 = 56/3$ de la population U. Ceci s'explique puisque nous avons montré que : $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right) = \sigma^2/n$.

Remarque

Nous aurions pu choisir d'autres possibilités pour estimer la moyenne μ :

- La première observation,
- la seconde estimation,
- ou encore la médiane.

Ce qui nous fournit trois autres estimateurs :

$$\widehat{\mu}_{2,1} = X_1, \quad \widehat{\mu}_{2,2} = X_2, \quad \widehat{\mu}_{2,3} = Q_{1/2}.$$

Ces trois estimateurs possèdent aussi des lois de probabilités.

Suite de l'exemple

Nous avons

- $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 6 = \mu$
- $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 56/3$
- $\widehat{\mu}_{2,3} = \widehat{\mu}_2$.

Cette situation est très particulière. Elle résulte de la taille de l'échantillon. De façon générale, le comportement de $\widehat{\mu}_{2,3}$ n'est pas identique à celui de $\widehat{\mu}_2$.

Suite de l'exemple

- Intéressons-nous à présent à l'estimateur de la variance σ^2 de la population U qui est égale à $56/3$.
- Interrogeons-nous sur le caractère sans biais ou non de l'estimateur de la variance σ^2 de la population U fourni par la variance S_2^2 de l'échantillon aléatoire.
- Le tableau qui va suivre donne les neuf valeurs possibles de l'estimateur S_2^2 correspondant aux neuf échantillons.

Suite de l'exemple

Les valeurs du tableau sont calculées par l'expression :

$$s_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (x_i - \widehat{\mu}_2)^2.$$

Les valeurs possibles de S_2^2 :

x_1	x_2		
	2	4	12
2	0	1	25
4	1	0	16
12	25	16	0

Suite de l'exemple

- Nous avons

$$\mathbb{E}\left(S_2^2\right) = \frac{3}{9} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 16 + \frac{2}{9} \times 25 = \frac{28}{3}.$$

- Nous constatons ainsi que S_2^2 est un estimateur biaisé de la variance σ^2 de la population U puisque nous avons :

$$\mathbb{E}\left[S_2^2\right] \neq \sigma^2.$$

- Le biais de S_2^2 est égal à

$$B(S_2^2) = 28/3 - 56/3 = -28/3.$$

Suite de l'exemple

Le tableau ci-dessous donne les neuf valeurs possibles de $S^2_{2,c}$. Ces neuf valeurs sont calculées par l'expression :

$$s^2_{2,c} = \frac{1}{2-1}\sum_{i=1}^{2}(x_i - \widehat{\mu}_2)^2.$$

x_1	x_2		
	2	4	12
2	0	2	50
4	2	0	32
12	50	32	0

Remarque

En calculant

$$\mathbb{E}\left(S^2_{2,c}\right) = \frac{3}{9} \times 0 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 50 = \frac{56}{3},$$

nous vérifions bien que l'estimateur corrigé de la variance $S^2_{2,c}$ est un estimateur sans biais de la variance σ^2 de la population U.

Sommaire

Comme nous l'avons vu précédemment, la variance d'un estimateur joue un rôle important dans la mesure de précision.

Cas d'un estimateur sans biais

Si $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ, nous utilisons comme mesure de précision sa variance $\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right)$. Plus la $\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right)$ est petite, plus l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est précis.

La seconde propriété

Entre deux estimateurs non biaisés, nous choisirons le plus précis des deux, c'est-à-dire celui de plus petite variance.

Soit un échantillon aléatoire de taille n relativement élevée, prélevé dans une population U normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si $\widehat{\mu}_n$ désigne la moyenne de l'échantillon aléatoire et $Q_{1/2}$ la médiane de l'échantillon aléatoire alors, nous avons :

- $\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_n\right) = \mu, \quad \mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
- $\mathbb{E}\left(Q_{1/2}\right) = \mu, \quad \mathrm{Var}\left(Q_{1/2}\right) \simeq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sigma^2}{n}.$

Nous avons donc : $\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu_n}\right) < \mathrm{Var}\left(Q_{1/2}\right).$

Donc $\widehat{\mu}_n$ est un estimateur plus précis que $Q_{1/2}$ dans le cas d'une population normale.

Cas d'un estimateur quelconque

Si $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur de θ, nous mesurons la précision de $\widehat{\theta}_n$ par l'**écart quadratique moyen** (EQM) :

$$EQM\left(\widehat{\theta}_n\right) = \mathrm{Var}\left[\widehat{\theta}_n\right] + B^2\left(\widehat{\theta}_n\right).$$

Si $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais, c'est-à-dire si $B\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0$, alors nous retrouvons la propriété précédente.

Entre deux estimateurs de θ, nous choisissons celui dont l'écart quadratique moyen est le plus faible.
Voir le livre « Maxi Fiches », page 116.

Propriété

Un estimateur $\widehat{\theta}_{n,1}$ *est* **relativement plus efficace** *que* $\widehat{\theta}_{n,2}$ *s'il est plus précis que le second, c'est-à-dire si :*

$$EQM(\widehat{\theta}_{n,1}) \leqslant EQM(\widehat{\theta}_{n,1}).$$

Voir le livre « Maxi Fiches », page 111.

Sommaire

Propriété

Un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ est un estimateur **convergent** *s'il « tend vers θ » quand n tend vers plus l'infini.*

Remarque

Il s'agit de la convergence en probabilité évoquée ici que nous allons rappeler ci-dessous.

Définition

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}\right] = 0.$$

Remarque

Cette propriété signifie que plus la taille n de l'échantillon est grande, plus l'événement selon lequel $\widehat{\theta}_n$ prend des valeurs très proches de θ, a une probabilité élevée qui se rapproche de 1.

Une façon de vérifier cette propriété est fournie par la propriété suivante :

Propriété

Si un estimateur est non biaisé et que sa variance tend vers zéro quand n tend vers plus l'infini, alors cet estimateur est convergent.

Exemple

Nous avons montré auparavant, dans un tirage aléatoire avec remise, que :

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\mu}_n\right] = \mu \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\left[\widehat{\mu}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0, \qquad \text{lorsque } n \to +\infty$$

Nous en déduisons que $\widehat{\mu}_n$ est un estimateur convergent.