

Modèle macroscopique avec congestion pour le déplacement de troupeaux de moutons

Laurent Navoret

IMATH, Toulon, Jeudi 2 Décembre 2010

Déplacement collectif dans les populations animales

- interactions locales sans leader \Rightarrow mouvement collectif



- modèles forces sociales
[Aoki] [Vicsek] [Couzin] [Helbing] [Bertozzi] [Cucker-Smale]

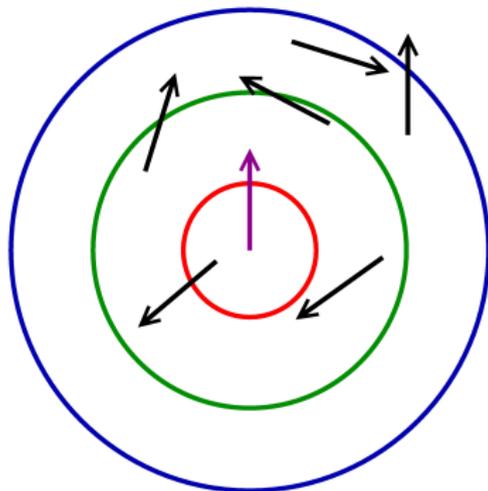
modèle individu-centré

$(X_k(t), V_k(t)), k \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k, \quad \frac{dV_k}{dt} = F_k$$

$\rightarrow F_k =$ répulsion-attraction
alignement

$\rightarrow |V_k| \approx \text{const.} : \text{auto-propulsion}$



Déplacement collectif dans les populations animales

- interactions locales sans leader \Rightarrow mouvement collectif



- modèles forces sociales
[Aoki] [Vicsek] [Couzin] [Helbing] [Bertozzi] [Cucker-Smale]

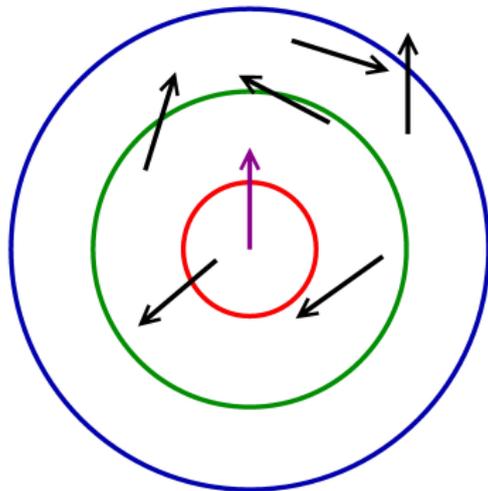
modèle individu-centré

$$(X_k(t), V_k(t)), k \in \{1, \dots, N\}$$



modèle macroscopique

à grande échelle
 $(\rho(x, t), u(x, t))$



Déplacement collectif dans les populations animales

- interactions locales sans leader \Rightarrow mouvement collectif



- modèles forces sociales
[Aoki] [Vicsek] [Couzin] [Helbing] [Bertozzi] [Cucker-Smale]

Projet ANR Parnurge

- étude du comportement du moutons
- quantifier les interactions (l'action de suivre un congénère)
[Pillot, Bon]
- description macroscopique



Troupeaux de moutons : mouvement collectif et congestion



*Similutes avec le trafic routier [Berthelin et al.],
les foules [Bellomo Dogbé], ...*

- **Congestion** : contrainte de non-chevauchement des particules
 - existence d'une densité maximale ρ^*
 - transition entre des domaines congestionnés et des domaines non-congestionnés
 - dynamique incompressible/compressible
- déplacement d'un troupeau de mouton : tous les moutons ont un **module de vitesse constant**

Plan

① Dérivation du modèle macroscopique

Modèle particulaire

Modèle cinétique et changement d'échelle hydrodynamique

Modèle macroscopique

② Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Le modèle asymptotique

Dans la phase congestionnée

La dynamique de l'interface

③ Simulations numériques

Méthodes numériques pour la congestion

Méthodes numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse

④ Conclusion

Plan

1 Dérivation du modèle macroscopique

Modèle particulaire

Modèle cinétique et changement d'échelle hydrodynamique

Modèle macroscopique

2 Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Le modèle asymptotique

Dans la phase congestionnée

La dynamique de l'interface

3 Simulations numériques

Méthodes numériques pour la congestion

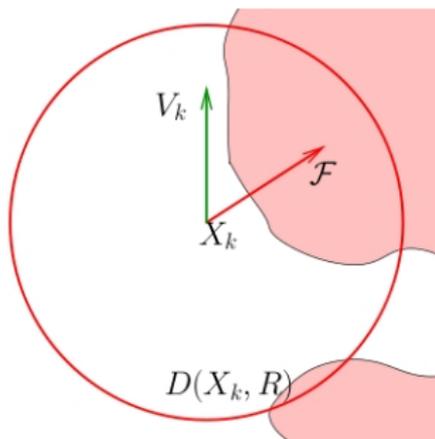
Méthodes numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse

4 Conclusion

Modèle microscopique

- interactions de type attraction-répulsion (pas d'alignement)
- N moutons : positions $X_k \in \mathbb{R}^2$
vitesses $V_k \in \mathbb{R}^2$, avec $|V_k| = 1$

$$\begin{aligned}\frac{dX_k}{dt} &= V_k, \\ \frac{dV_k}{dt} &= (\text{Id} - V_k \otimes V_k) \left(\underbrace{\mathcal{F}_k^a}_{\text{attraction}} - \underbrace{\mathcal{F}_k^r}_{\text{répulsion}} \right),\end{aligned}$$



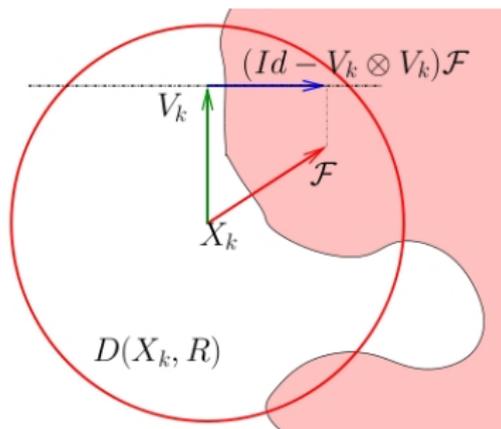
- \mathcal{F}_k^a dans la direction du barycentre de la distribution de masse l'intérieur du disque de rayon R_a
- \mathcal{F}_k^r dans la direction du barycentre de la distribution de masse l'intérieur du disque de rayon R_r

Modèle microscopique - contrainte sur V

- interactions de type attraction-répulsion (pas d'alignement)
- N moutons : positions $X_k \in \mathbb{R}^2$
vitesses $V_k \in \mathbb{R}^2$, avec $|V_k| = 1$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k,$$

$$\frac{dV_k}{dt} = (\text{Id} - V_k \otimes V_k) \left(\underbrace{\mathcal{F}_k^a}_{\text{attraction}} - \underbrace{\mathcal{F}_k^r}_{\text{répulsion}} \right),$$



$$\bullet \quad |V_k|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_k}{dt} \perp V_k$$

$\Rightarrow (\text{Id} - V_k \otimes V_k) =$ projection orthogonale sur la droite orthogonale à V_k .

\Rightarrow **Quantité de mouvement non conservée**

Modèle microscopique - attraction à longue portée, répulsion à courte portée

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k,$$

$$\frac{dV_k}{dt} = (\text{Id} - V_k \otimes V_k) \left(\underbrace{\mathcal{F}_k^a}_{\text{attraction}} - \underbrace{\mathcal{F}_k^r}_{\text{répulsion}} \right),$$

- $\mathcal{F}_k = \nu_k \xi_k$
 - ν_k , intensité
 - ξ_k = barycentre de la distrib. de masse dans le disque $D(X_k, R)$

$$= \left(\sum_{j, |X_j - X_k| < R} (X_k - X_j) \right) / \left(\sum_{j, |X_j - X_k| < R} 1 \right)$$

- force d'attraction : longue portée et intensité modérée
- force de répulsion : courte portée et forte intensité

$$R_r \ll R_a \text{ et } \nu_a \ll \nu_r$$

$$\nu_k^r = \nu_r \left(\sum_{j, |X_j - X_k| \leq R_r} 1 \right)$$

ν_r tend vers $+\infty$ quand la densité locale tend vers une densité maximale

Limite champ moyen

- $f(x, v, t)$ fonction de distribution dans l'espace des phases, $x \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{S}^1$
- Grand nombre de particules en interactions : $N \rightarrow +\infty$ (limite champ-moyen)

$$f^N(x, v, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(x - X_k(t)) \delta(v, V_k(t)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f$$

- f satisfait : $\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot ((\text{Id} - v \otimes v)(\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_r)f) = 0$

$$\mathcal{F}_{a,r}(x, v, t) = \nu_{a,r} \xi_{a,r}, \quad \xi_{a,r}(x, t) = \frac{\int_{D(x, R_{a,r})} (y - x) \rho(y, t) dy}{\int_{D(x, R_{a,r})} \rho(y, t) dy}$$

$$\rho(x, t) = \int_v f(x, v, t) dv = \text{densité}$$

Changement d'échelle dans le modèle cintique

- Dynamiques à grandes échelles de temps et d'espace : changement d'échelle hydrodynamique

$$\tilde{x} = \eta x, \quad \tilde{t} = \eta t, \quad \eta \ll 1$$

Répulsion :

① $R_r = O(\eta)$

② $\nu_r = O(1)$

$$\rightarrow \mathcal{F}_r = \eta \nu_r \frac{\nabla_x \rho}{\rho}$$

→ force de répulsion locale

Attraction :

① $R_a = O(1)$

② $\nu_a = O(\eta)$

$$\rightarrow \mathcal{F}_a = O(\eta)$$

→ force d'attraction non locale

- **Congestion** : ρ^* densité maximale et $\nu_r(\rho) \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow \rho^*$

Modèle cinétique

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot ((\text{Id} - v \otimes v)(\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_r)f) = 0$$

Force d'attraction non locale

$$\mathcal{F}_a = \nu_a \xi_a, \quad \xi_a(x, t) = \frac{\int_{D(x, R_a)} (y - x) \rho(y, t) dy}{\int_{D(x, R_a)} \rho(y, t) dy}$$

Force de répulsion locale

$$\mathcal{F}_r = \nu_r(\rho) \frac{\nabla_x \rho}{\rho} =: \nabla_x p(\rho)$$

avec p tel que $p'(\rho) = \nu_r(\rho)/\rho$

Modèle macroscopique

- Moments :
densité $\rho = \int f(x, v, t) dv$
quantité de mouvement $\rho u = \int v f(x, v, t) dv$
- Hypothèse monocinétique : $f(x, v, t) = \rho(x, t) \delta(v, u(x, t))$, $|u| = 1$.
"Localement, il y a une seule vitesse"

Intégration de l'équation cinétique conduit au système

$$|u| = 1$$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u)(\nabla_x p(\rho) - \mathcal{F}_a) = 0$$

Plan

1 Dérivation du modèle macroscopique

Modèle particulaire

Modèle cinétique et changement d'échelle hydrodynamique

Modèle macroscopique

2 Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Le modèle asymptotique

Dans la phase congestionnée

La dynamique de l'interface

3 Simulations numériques

Méthodes numériques pour la congestion

Méthodes numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse

4 Conclusion

Limite asymptotique de congestion

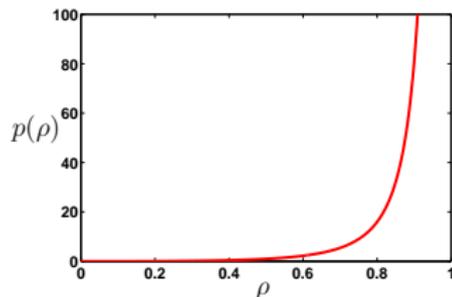
Modèle sans attraction : $\mathcal{F}_a = 0$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u) \nabla_x p(\rho) = 0$$

$$|u| = 1$$

- **Pression singulière** : $p(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$
- **Apparition de deux dynamiques** :
Pour $[\rho \ll \rho^*] \rightarrow$ faible répulsion
Pour $[\rho \sim \rho^*] \rightarrow$ congestion



Pour accentuer cette différence : change p en εp

- Pour $\rho < \rho^*$, $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon)$
- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$

Limite asymptotique de congestion

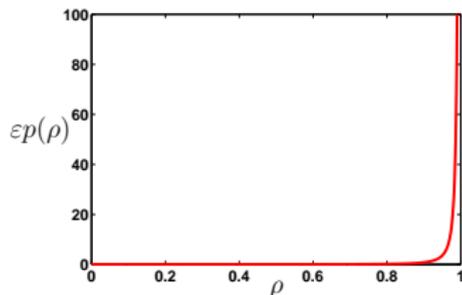
Modèle sans attraction : $\mathcal{F}_a = 0$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + (Id - u \otimes u) \nabla_x p(\rho) = 0$$

$$|u| = 1$$

- **Pression singulière** : $p(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \rho^*} +\infty$
- **Apparition de deux dynamiques** :
Pour $[\rho \ll \rho^*]$ \rightarrow faible répulsion
Pour $[\rho \sim \rho^*]$ \rightarrow congestion



Pour accentuer cette différence : change p en εp

- Pour $\rho < \rho^*$, $\varepsilon p(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon)$
- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$

Modèle avec deux phases

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot \rho^\varepsilon u^\varepsilon = 0$$

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon + (Id - u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) \varepsilon \nabla_x p(\rho^\varepsilon) = 0$$

$$|u^\varepsilon| = 1$$

- $\varepsilon p(\rho^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho < \rho^* \\ \bar{p}(x, t) \in [0, +\infty[& \text{si } \rho^\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho^* \end{cases}$
- A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, deux phases :

Dans la **phase diluée** $\rho < \rho^*$,

$$|u| = 1$$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho u = 0$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u = 0$$

$$\bar{p} = 0$$

Dans la **phase congestionnée** $\rho = \rho^*$

$$|u| = 1$$

$$\rho = \rho^*, \quad \nabla_x \cdot u = 0$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u$$

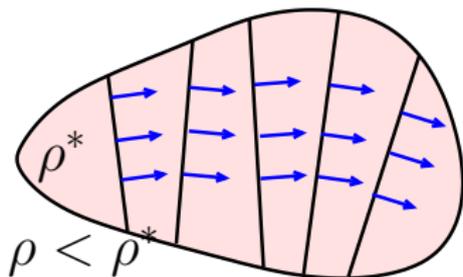
$$+ (Id - u \otimes u) \nabla_x \bar{p} = 0$$

Dynamique des gaz sans pression

Euler incompressible

La phase congestionnée

- Euler incompressible avec contrainte sur le module de la vitesse
- $\nabla_x \cdot u = 0$ et $|u| = 1$
 - u constant sur les droites orthogonales à u
 - u est constant



- équation elliptique satisfaite par \bar{p} sur chaque droite

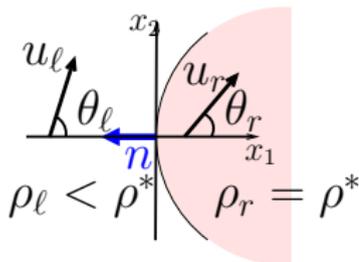
$$-\nabla_x \cdot ((Id - u \otimes u) \nabla_x \bar{p}) = \nabla_x^2 : (u \otimes u)$$

- conditions aux limites? non fournies par l'analyse asymptotique formelle
- **modèle asymptotique incomplet**

Conditions de bords

Problème de Riemann 1D à travers l'interface entre une région congestionnée $C_t = \{x, \rho(x) = \rho^*\}$ et une région non-congestionnée

$$\cos \theta = u \cdot n$$



Problème de Riemann 1D avec $\varepsilon > 0$

- $u = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
- Système 1D

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \cos \theta) = 0$$

$$\partial_t \cos \theta + \cos \theta \partial_x \cos \theta + \sin^2 \theta \partial_x \varepsilon p(\rho) = 0$$

→ **système non conservatif !**

Formulation conservative 1D

En divisant par $\sin \theta^2$, on obtient le système conservatif

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \cos \theta) = 0$$

$$\partial_t \Psi(\cos \theta) + \partial_x (\Phi(\cos \theta) + \varepsilon p(\rho)) = 0$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \log((1+u)/(1-u)), \quad \Phi(u) = -\log\left(1/\sqrt{1-u^2}\right)$$

Système strictement hyperbolique

- champs non linéairement dégénérés à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.
- solutions faibles entropiques pour le problème de Riemann (somme d'ondes de chocs et de raréfactions)

Résolution du problème de Riemann 1D et limite des solutions $\varepsilon \rightarrow 0$

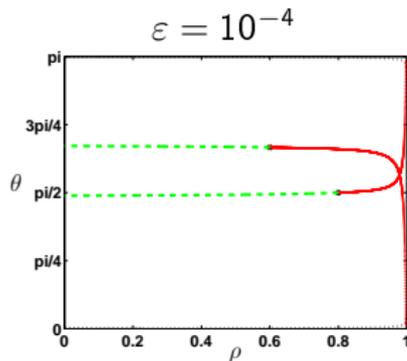
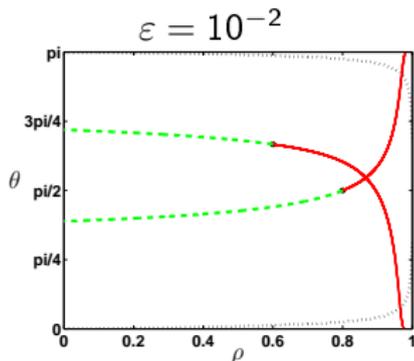
Restrictions :

→ Valide pour $\theta \in]0, \pi[$.

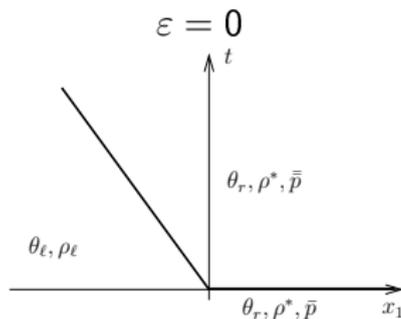
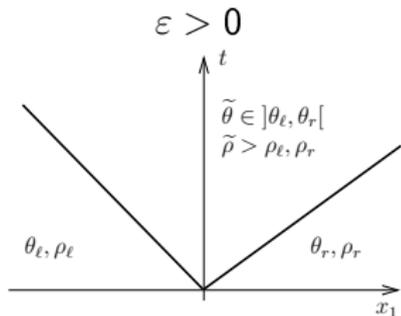
→ **pas unicité** de la formulation conservative mais des comportements communs

Limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les problèmes de Riemann

Intersection des courbes d'ondes :



Résolution du problème de Riemann :



Conditions aux bords

- Limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les solutions du problème de Riemann
- interface **Congestionnée** ($\rho = \rho^*$) / **Non-congestionnée** ($0 < \rho < \rho^*$)
→ conditions de Rankine Hugoniot donnent le saut de pression et la vitesse de l'interface

$$\bar{p}|_{\partial C_t} = \frac{[\Psi(u \cdot n)][\rho(u \cdot n)]}{[\rho]} - [\Phi(u \cdot n)]$$
$$\sigma = \frac{[\rho(u \cdot n)]}{[\rho]}$$

- interface **Congestionnée** ($\rho = \rho^*$) / **Vide** ($\rho = 0$)

$$\bar{p}|_{\partial C_t} = 0$$
$$\sigma = u \cdot n$$

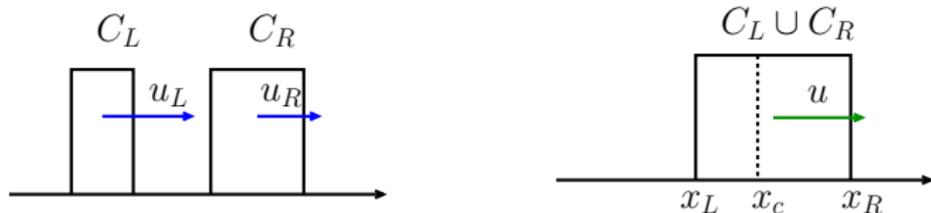
Conditions de bords

- **Collision** entre deux régions **congestionnée**

→ problème de Riemann ne fournit pas de solution : $\bar{p} = \infty$

→ en 1D, collision entre deux domaines congestionnés avec un delta en temps pour la pression

- $\bar{p} = \pi(x)\delta(t - t_c)$, t_c instant de collision



- u déterminée par

$$(\Psi(u) - \Psi(u_L))(x_c - x_L) + (\Psi(u) - \Psi(u_R))(x_R - x_c) = 0$$

- analogie avec les modèles bi-phasiques [Bouchut et al.]

→ en 2D, géométrie de la collision plus complexe...

Plan

1 Dérivation du modèle macroscopique

Modèle particulaire

Modèle cinétique et changement d'échelle hydrodynamique

Modèle macroscopique

2 Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée

Le modèle asymptotique

Dans la phase congestionnée

La dynamique de l'interface

3 Simulations numériques

Méthodes numériques pour la congestion

Méthodes numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse

4 Conclusion

Méthodes numériques pour la congestion¹

- Simulations numériques des collisions
- Sans contrainte sur la vitesse : système d'Euler avec la contrainte de congestion

$$u \in \mathbb{R}^2$$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \varepsilon \nabla_x p(\rho) = 0$$

- Schémas préservant l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$
 - **grandes vitesses d'onde** dans les domaines incompressibles : asymptotique faible-Mach dans les domaines congestionnés
 - la stabilité requiert de l'implicitation
 - **capturer** numériquement la dynamique de l'interface

1. Travail en collaboration avec Pierre Degond et Jiale Hua

Schéma semi-implicite

Schéma semi-discrétisé en temps $(\rho^n, (\rho u)^n) = (\rho, \rho u)(n\Delta t)$

- ① implicite pour la densité ρ :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^{n+1} = 0$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^n - \Delta t \nabla_x^2 : \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) - \Delta t \varepsilon \Delta_x p(\rho^{n+1}) = 0$$

- ② semi-implicite pour ρu :

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) + \varepsilon \nabla_x p(\rho^{n+1}) = 0,$$

→ implicite \Rightarrow **stabilité**

→ résolution de l'équation elliptique en la variable p :

contrainte sur la densité satisfaite $\rho^n = p^{-1}(p^n) < \rho^*$

→ discrétisation des dérivées spatiales par volumes finis : **conservativité**

Schéma semi-implicite

Schéma semi-discrétisé en temps $(\rho^n, (\rho u)^n) = (\rho, \rho u)(n\Delta t)$

- ① implicite pour la densité ρ :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^{n+1} = 0$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^n - \Delta t \nabla_x^2 : \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) - \Delta t \varepsilon \Delta_x p(\rho^{n+1}) = 0$$

- ② semi-implicite pour ρu :

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) + \varepsilon \nabla_x p(\rho^{n+1}) = 0,$$

→ implicite \Rightarrow **stabilité**

→ résolution de l'équation elliptique en la variable p :

contrainte sur la densité satisfaite $\rho^n = \rho^{-1}(\rho^n) < \rho^*$

→ discrétisation des dérivées spatiales par volumes finis : **conservativité**

Schéma semi-implicite

Schéma semi-discrétisé en temps $(\rho^n, (\rho u)^n) = (\rho, \rho u)(n\Delta t)$

- ① implicite pour la densité ρ :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^{n+1} = 0$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot (\rho u)^n - \Delta t \nabla_x^2 : \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) - \Delta t \varepsilon \Delta_x p(\rho^{n+1}) = 0$$

- ② semi-implicite pour ρu :

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla_x \cdot \left(\frac{(\rho u)^n \otimes (\rho u)^n}{\rho^n} \right) + \varepsilon \nabla_x p(\rho^{n+1}) = 0,$$

→ implicite \Rightarrow **stabilité**

→ résolution de l'équation elliptique en la variable p :

contrainte sur la densité satisfaite $\rho^n = \rho^{-1}(\rho^n) < \rho^*$

→ discrétisation des dérivées spatiales par volumes finis : **conservativité**

Deux méthodes

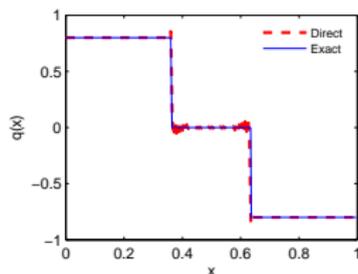
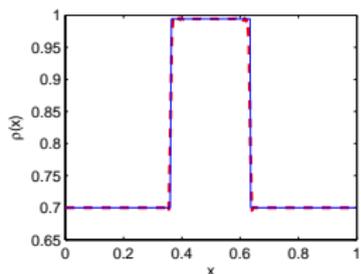
Méthode directe :

- adaptation de la méthode [Degond, Tang, 2010]
- composition de la pression : $p(\rho^{n+1}) \rightarrow p_0(\rho^n) + p_1(\rho^{n+1})$ avec
 $p = p_0 + p_1$

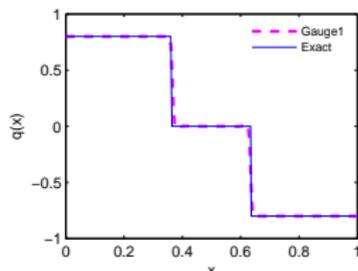
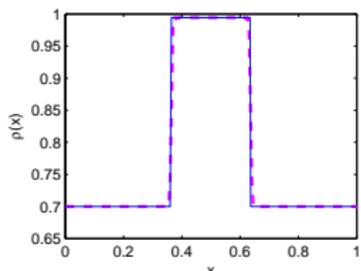
Méthode de jauge :

- méthode directe + décomposition de Hodge [Degond, Jin, Liu, 2007]
- $\rho u = a - \nabla_x \varphi, \quad \nabla_x \cdot a = 0$

méthode
directe :
oscillations



méthode de
jauge :
moins
d'oscillations



Deux méthodes

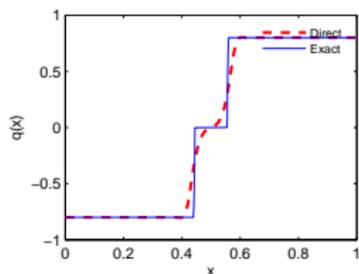
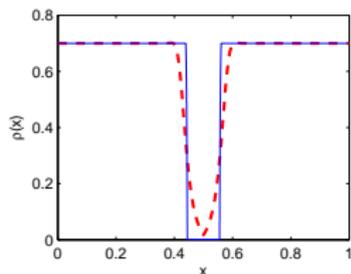
Méthode directe :

- adaptation de la méthode [Degond, Tang, 2010]
- composition de la pression : $p(\rho^{n+1}) \rightarrow p_0(\rho^n) + p_1(\rho^{n+1})$ avec
 $p = p_0 + p_1$

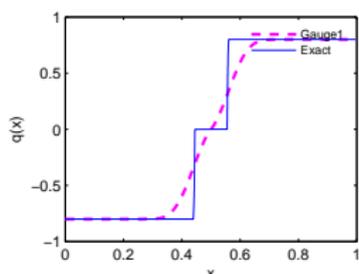
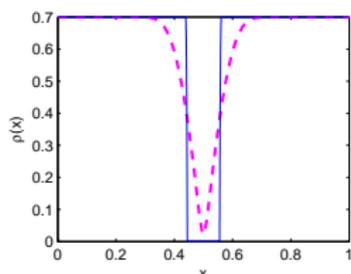
Méthode de jauge :

- méthode directe + décomposition de Hodge [Degond, Jin, Liu, 2007]
- $\rho u = a - \nabla_x \varphi, \quad \nabla_x \cdot a = 0$

méthode
directe :
moins diffusif



méthode de
jauge :
diffusif



Convergence

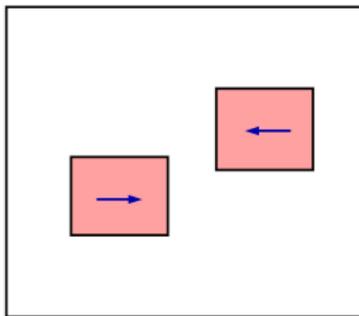
- dans les zones congestionnées : préservation de l'asymptotique
- calcul de l'erreur en norme L^1

| ε | Paramètres | | Direct | Gauge 1 |
|---------------|------------|------------|-------------------------|-------------------------|
| | Δx | Δt | $e(W)$ | $e(W)$ |
| 10^{-2} | 1/200 | 1/1000 | 7.6793×10^{-3} | 7.8588×10^{-3} |
| | 1/800 | 1/4000 | 1.7934×10^{-3} | 1.8646×10^{-3} |
| 10^{-4} | 1/200 | 1/1000 | 4.2631×10^{-3} | 4.9486×10^{-3} |
| | 1/800 | 1/4000 | 1.3085×10^{-3} | 1.4253×10^{-3} |
| 10^{-8} | 1/200 | 1/1000 | 7.0600×10^{-3} | 5.8159×10^{-3} |
| | 1/800 | 1/4000 | 1.7611×10^{-3} | 1.4624×10^{-3} |

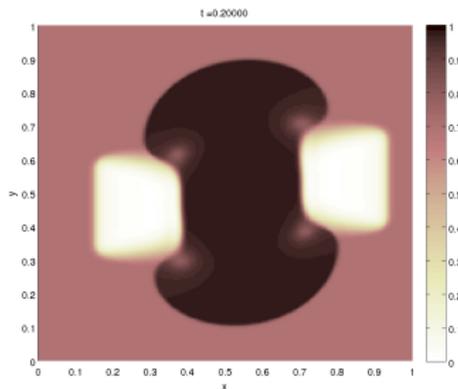
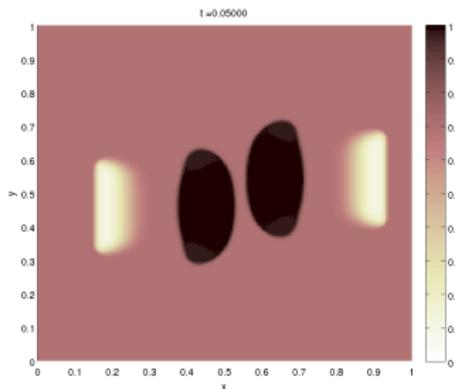
→ numériquement, préservation de l'asymptotique

Simulations numériques

- Condition initiale : $\rho_0(x) = 0.7$



- Collision



Méthode numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse²

Cadre : modèle de Vicsek

- modèle micro : positions X_k , vitesses V_k avec $|V_k| = 1$

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k$$

$$dV_k = (\text{Id} - V_k \otimes V_k)(\nu \bar{V}_k dt + \sqrt{2d} dB_t^k)$$

$$\bar{V}_k = \text{Direction moyenne dans le disque de rayon } R$$

$$dB_t^k = \text{Bruit blanc}$$

- modèle macro [Degond, Motsch, 07] :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho u) = 0$$

$$\partial_t \rho u + c_2 \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) = -\frac{d}{\nu} (\text{Id} - u \otimes u) \nabla_x \rho$$

$$|u| = 1$$

→ pas de congestion

Méthode numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse

- Système hyperbolique non-conservatif

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho u) = 0$$

$$\partial_t \rho u + c_2 \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) = -\frac{d}{\nu} (\text{Id} - u \otimes u) \nabla_x \rho, \quad |u| = 1$$

- Multitude de solutions : non-unicité des solutions (discontinues)
 - problème asymptotique **incomplet**
 - quelle solution sélectionner ?

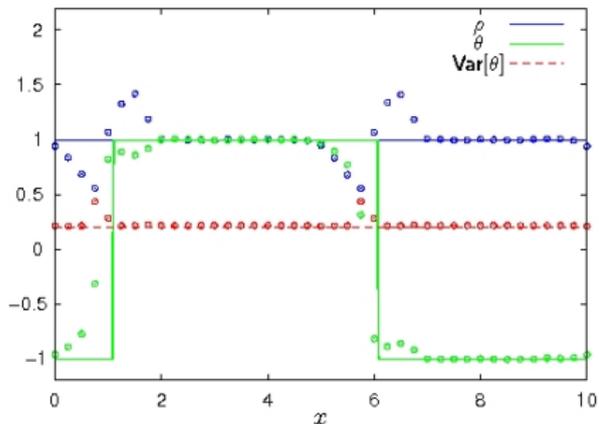
Méthode : utilisation du schéma numérique pour sélectionner la "bonne" solution : celle qui correspond au système particulaire

- ① schéma basé sur la formulation conservative
- ② schéma basé sur une relaxation de la contrainte

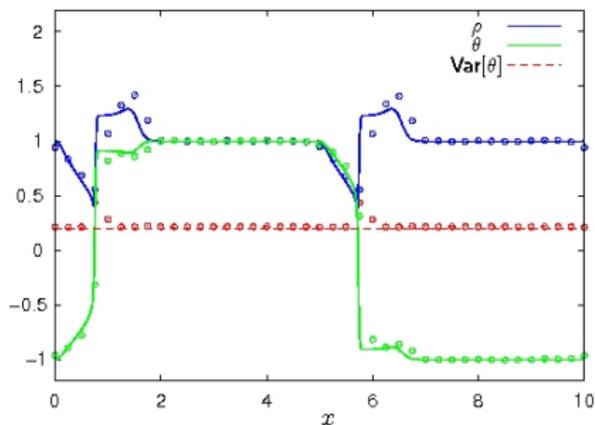
$$\partial_t \rho u + c_2 \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{d}{\nu} \nabla_x \rho = -\frac{\rho}{\kappa} (1 - |u|^2) u, \quad \kappa \ll 1$$

Résultats

méthode conservative



méthode splitting



→ méthode de splitting concorde

Plan

- 1 Dérivation du modèle macroscopique
 - Modèle particulaire
 - Modèle cinétique et changement d'échelle hydrodynamique
 - Modèle macroscopique
- 2 Etude de la transition congestionnée/non-congestionnée
 - Le modèle asymptotique
 - Dans la phase congestionnée
 - La dynamique de l'interface
- 3 Simulations numériques
 - Méthodes numériques pour la congestion
 - Méthodes numériques pour la contrainte géométrique sur la vitesse
- 4 Conclusion

Conclusion

- Dérivation d'un modèle macroscopique avec **congestion et contrainte sur la vitesse**
- Limite singulière pour le modèle macroscopique : transition congestionnée/non-congestionnée
→ **Etude de la transition compressible-incompressible**
- **Méthodes numériques** pour la contrainte de congestion et la contrainte sur la vitesse

Perspectives :

- ajout d'interactions d'alignement (modèle de Vicsek)
- Simulations numériques et comparaison avec le modèle microscopique
- modèle bi-fluide avec des moutons au repos et des moutons en mouvement