Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques

17 janvier 2008

Licence de mathématiques 3ème année

Algèbre L3S5

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats des cours. Toutefois, dans chaque partie d'un exercice, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. Soit G un groupe fini d'ordre n dont l'élément neutre est noté e. On suppose que G a exactement deux classes de conjugaison.

(a) Montrer que $G \neq \{e\}$.

(b) Montrer que $G \backslash \{e\} = \{g \in G \mid g \neq e\}$ est une classe de conjugaison.

(c) Soit $g \in G$ avec $g \neq e$. Quel est l'ordre de l'orbite de g pour l'action de G sur lui-même par conjugaison ? Quel peut être l'ordre du stabilisateur de g pour cette action ?

(d) Montrer que $n = 2$ et que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Dans tout l'exercice on considère l'anneau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec les opérations d'addition et de multiplication habituelles. Tous les morphismes $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ considérés sont des morphismes de groupes additifs.

(a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $f \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donnée par $f(x, y) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ est un morphisme de groupes.

(b) Montrer que ce morphisme f est surjectif si et seulement si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

(c) Soit $g \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe un unique couple $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tels que $g(x, y) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

(d) Soit X l'ensemble des morphismes de groupes *surjectifs* $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Montrer que $|X| = 8$.

(e) Quelles sont les unités de l'anneau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Pour $f \in X$ et $\gamma \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ soit l'application $\gamma f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto \gamma f(x, y)$. Montrer que $\gamma f \in X$ et que

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \times X &\to X \\ (\gamma, f) &\mapsto \gamma f \end{aligned}$$

est une opération de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ sur X.

(f) Déterminer les ordres des orbites pour cette opération. Combien y a-t-il d'orbites ?

(g) Soient $f, g \in X$. Montrer que f et g sont dans la même orbite pour l'opération ci-dessus si et seulement si $\ker(f) = \ker(g)$.

(h) Trouver le nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$ d'indice 3.

3. Soit $A = \{m + in\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(b) Le but de cette question est de trouver les unités de A.

i. Montrer que si $a \in A$, alors $|a|^2 \in \mathbb{Z}$.

ii. Supposons que $a \in A$ est une unité, avec inverse b. Montrer que $|a|^2|b|^2 = 1$ puis que $|a|^2 = 1$.

iii. Trouver les unités de A.

(c) Montrer que si $a, b \in A$ tels que $ab = 2$ alors $a = \pm 1, \pm 2$.

(d) Soit $I = \{2a + b(1 + i\sqrt{5}) \mid a, b \in A\}$. Montrer que $I \subset A$ est un idéal. Montrer que $1 \notin I$ et en déduire que $I \neq A$.

(e) Montrer que I n'est pas un idéal principal.

On pourra raisonner par l'absurde et supposer que $I = (a)$. En utilisant le fait que $2 \in I$ et la question 3(c) on pourra alors déterminer les valeurs possibles de a et arriver à une contradiction.