Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques

14 juin 2006

Master de mathématiques 1ère année

Algèbre M1S2

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats des cours. Toutefois, dans chaque partie d'un exercice, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer ***d'abord*** si l'énoncé est vrai ou faux et donner ***ensuite*** une justification (démonstration ou contre exemple) de votre réponse.

Dans les 1(a)–1(d), $P \in \mathbb{Q}[X]$ désigne un polynôme irréductible de degré 4, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) $K/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.

(b) $K/\mathbb{Q}$ n'est pas une extension galoisienne.

(c) Si P est décomposé sur K, alors $K/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.

(d) Si P n'est pas décomposé sur K, alors $K/\mathbb{Q}$ n'est pas une extension galoisienne.

2. Le but de cet exercice est de trouver un générateur de $\mathbb{F}_{25}^{\times}$ et son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_5$.

(a) Montrer que 2 est un générateur de $\mathbb{F}_5^{\times}$ et en déduire que le polynôme $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.

(b) Notons $K = \mathbb{F}_5[X]/(X^2 - 2)$ et $\alpha = \bar{X} \in K$. Montrer que K est un corps d'ordre 25 et trouver l'ordre de α dans $K^{\times}$.

(c) Montrer que les éléments d'ordre 3 dans $K^{\times}$ sont les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. Trouver ces racines en les exprimant sous la forme $a + b\alpha$ (avec $a, b \in \mathbb{F}_5$).

t.s.v.p.

(d) Trouver un générateur de $K^\times$ ainsi que son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_5$.

3. Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et L une extension cyclique de K de degré 4. Soit f un générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in L$ avec $\alpha \neq 0$ tel que $f^2(\alpha) = -\alpha$.

On fixe α comme ci-dessus.

(b) Montrer que le stabilisateur de α dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ est $\{\mathrm{id}\}$.

(c) Montrer que $L = K(\alpha)$.

(d) Montrer que le polynôme minimal de α sur K est de la forme

$$X^4 + AX^2 + B$$

(avec $A, B \in K$).

On conserve les notations ci-dessus et on note $D = A^2 - 4B$ le discriminant du polynôme $T^2 + AT + B$.

(e) Montrer que ni B ni D n'est un carré dans K mais que DB^{-1} est un carré dans K. (Indication : exprimer B et D en fonction de α et $f(\alpha)$).

(f) On considère le cas particulier où $K = \mathbb{Q}$ et où on pose $\omega = e^{2i\pi/5} \in \mathbb{C}$ et $L = \mathbb{Q}(\omega)$. Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est cyclique de degré 4 et trouver $\alpha \in L$ (exprimé comme polynôme en ω) dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ soit de la forme $X^4 + AX^2 + B$. Déterminer aussi ce polynôme minimal.