Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques

11 septembre 2006

Master de mathématiques 1ère année

Algèbre M1S2

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats des cours. Toutefois, dans chaque partie d'un exercice, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. Soient K un corps avec $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $P(X) = X^4 + AX^2 + B \in K[X]$ un polynôme irréductible et $D = A^2 - 4B$ le discriminant du polynôme $T^2 + AT + B$. On note L un corps de décomposition de P sur K.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in L$ tels que

$$P(X) = (X - \alpha)(X + \alpha)(X - \beta)(X + \beta)$$

et que les éléments $\pm\alpha, \pm\beta$ sont distincts.

On fixe $\alpha, \beta \in L$ comme ci-dessus.

(b) Montrer que D n'est pas un carré dans K mais que D est un carré dans $K(\alpha)$. (Indication : On pourra établir que le polynôme $T^2 + AT + B$ est décomposé sur $K(\alpha)$.)

Dans la suite **on suppose que DB^{-1} est un carré dans K.**

(c) Montrer que $L = K(\alpha)$.

(d) Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tel que $f(\alpha) = \beta$.

(e) Soit $\delta \in L$ tel que $\delta^2 = D$ (on a vu dans la question 1(b) qu'un tel δ existe). Montrer que $f(\delta) = -\delta$.

(f) Montrer que L/K est une extension cyclique et que f engendre le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$. (Remarque : une extension cyclique est une extension galoisienne dont le groupe de Galois est cyclique.)

2. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer ***d'abord*** si l'énoncé est vrai ou faux et donner ***ensuite*** une justification (démonstration ou contre exemple) de votre réponse.

(a) Soient p un nombre premier et $d \geq 1$ un entier. Alors il existe un polynôme irréductible $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré d.

(b) Soient K un corps fini et $d \geq 1$ un entier. Alors il existe un polynôme irréductible $P(X) \in K[X]$ de degré d.

(c) Soient L/K une extension finie de corps et $P(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible. Alors dans la factorisation de P dans $L[X]$, tous les facteurs irréductibles sont du même degré.

(d) Soient L/K une extension galoisienne finie de corps et $P(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible. Alors dans la factorisation de P dans $L[X]$, tous les facteurs irréductibles sont du même degré.

3. Soit $L \subset \mathbb{C}$ le corps de décomposition dans $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ de $X^4 - 11$.

(a) Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne et déterminer $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Montrer que L est stable par la conjugaison complexe (c'est-à-dire, pour tout $z \in L$ on a $\bar{z} \in L$).

(c) On note $c \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ la restriction de la conjugaison complexe et $H = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(i)) \subset \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Montrer que H est cyclique d'ordre 4 et que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = H \cup cH$.

(d) Déterminer le nombre de sous-corps $M \subset L$ avec $[M : \mathbb{Q}] = 4$.