Université Louis Pasteur — 4 juin 2007

Département de Mathématiques

Master de mathématiques 1ère année

Algèbre M1S2

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats prouvés dans le cours ou en TD. Toutefois, dans chaque partie des exercices 2 et 3, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer ***d'abord*** si l'énoncé est vrai ou faux et donner ***ensuite*** une justification (démonstration ou contre exemple) de votre réponse.

Dans toute la suite, on note K un corps et L une extension finie de K.

(a) Si K est de caractéristique 0 et si L/K est une extension galoisienne, alors tout polynôme irréductible $P \in K[X]$ qui possède une racine dans L est décomposé sur L.

(b) Si L/K est une extension galoisienne, alors tout polynôme irréductible $P \in K[X]$ qui possède une racine dans L est décomposé sur L.

(c) Si K est de caractéristique 0 et si tout polynôme irréductible $P \in K[X]$ qui possède une racine dans L est décomposé sur L, alors L/K est une extension galoisienne.

2. Soient $\omega = e^{2i\pi/9} \in \mathbb{C}$ et $L = \mathbb{Q}(\omega)$.

(a) Montrer que L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est isomorphe à un sous-groupe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$.

(b) Montrer que L est stable par la conjugaison complexe et en déduire que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ contient un élément d'ordre 2.

(c) Montrer que $\alpha = \omega + \omega^{-1}$ est une racine du polynôme $X^3 - 3X + 1$.

t.s.v.p.

(d) Montrer que $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 6$ et que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$.

(e) Trouver le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$.

(f) Trouver tous les sous-corps de $\mathbb{Q}(\omega)$ et les relations d'inclusion entre eux.

(g) Pour chacun des sous-corps $M \subset \mathbb{Q}(\omega)$ trouvés, indiquer si M est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.

3. Soit L/K une extension galoisienne finie de corps avec $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{S}_3$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un polynôme irréductible $P \in K[X]$ de degré 3 vérifiant $\mathrm{pgcd}(P, \partial_X P) = 1$ tel que L est un corps de décomposition de P sur K.

(a) Montrer que L contient une extension M de K avec $[M : K] = 3$.

(b) Soit $M \subset L$ une extension de K avec $[M : K] = 3$. Montrer que M/K n'est pas galoisienne.

On fixe une extension M de K contenue dans L vérifiant $[M : K] = 3$ et $\alpha \in M$ avec $\alpha \notin K$. Soit P le polynôme minimal de α sur K.

(c) Montrer que P est irréductible sur K et de degré 3.

(d) Montrer que P est décomposé sur L et que $\mathrm{pgcd}(P, \partial_X P) = 1$.

(e) Montrer que L est un corps de décomposition de P sur K.

(f) Montrer que le discriminant de P n'est pas un carré dans K.