Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques

13 septembre 2006

Master de mathématiques 1ère année

Algèbre M1S2

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats des cours. Toutefois, dans chaque partie d'un exercice, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. Soient k un corps et $L = k(X_1, \dots, X_n)$, c'est le corps des fractions de l'anneau $A = k[X_1, \dots, X_n]$. On sait que l'action de S_n sur A induit une action de S_n sur L par des automorphismes de corps.

(a) Soit $K = L^{\mathrm{S}_n}$ le corps des invariants pour l'action du groupe symétrique. Montrer que L/K est une extension galoisienne et que $[L : K] = n!$.

(b) Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$ et $K' = k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \subset L$. Montrer que $K' \subset K$.

(c) Soit $\Lambda(T)$ le polynôme

$$\Lambda(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j T^{n-j} \in K'[T].$$

Montrer que L est un corps de décomposition de $\Lambda(T)$ sur K'. En déduire que $[L : K'] \leq n!$.

(d) Montrer que $K = K'$, sans utiliser le théorème sur les polynômes symétriques. (Indication : Calculer les degrés dans la suite d'extensions $K' \subset K \subset L$.)

2. Soient $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^6 + X^3 + 8 \in \mathbb{Q}[X]$. On fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$\alpha^3 = \frac{-1 + i\sqrt{31}}{2}$$

t.s.v.p.

et on pose $\beta = 2\alpha^{-1}$. On pose $K = \mathbb{Q}(j)$, $N = K(\alpha) = \mathbb{Q}(j,\alpha)$, $G = \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ et $H = \mathrm{Gal}(N/K)$, on a donc $\mathbb{Q} \subset K \subset N$ et $H \subset G$. ***Vous pouvez utiliser sans démonstration que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.***

(a) Montrer que N est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$ et que $N/\mathbb{Q}$ et N/K sont des extensions galoisiennes. (Indication : Calculer $P(\alpha)$ et $P(\beta)$.)

(b) Montrer que $[\mathbb{Q}(j,\alpha^3) : \mathbb{Q}] = 4$ et que $[N : K] = 6$. (Indication : On a $\mathbb{Q}(i\sqrt{31}) = \mathbb{Q}(\alpha^3) \subset N$.)

(c) Montrer qu'il existe $\rho \in H$ tel que $\rho(\alpha) = j\alpha$ et $\sigma \in H$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$. Calculer $\sigma^2(\alpha)$.

(d) Montrer que $H = \langle \rho, \sigma \rangle$ et que $H \cong \mathrm{S}_3$.

3. On conserve les notations le l'exercice 2 dont vous pouvez utiliser les résultats.

Mis à part les données de l'exercice 2, vous n'aurez besoin que des informations suivantes : N/K est une extension galoisienne de degré 6 et avec $H = \mathrm{Gal}(N/K) \cong \mathrm{S}_3$. On a fixé deux éléments $\rho, \sigma \in H$ tels que $H = \langle \rho, \sigma \rangle$. Ces éléments vérifient $\rho(\alpha) = j\alpha$ resp. $\sigma(\alpha) = \beta$.

(a) Montrer que N est stable par la conjugaison complexe.

On note $\tau \in G = \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ la restriction à N de la conjugaison complexe. Montrer que τ est d'ordre 2.

(b) Calculer $\tau(\alpha)$ puis montrer que $\rho\tau = \tau\rho$ et que $\sigma\tau = \tau\sigma$. (Indication : Pour calculer $\tau(\alpha)$ trouver d'abord $|\alpha|$ et utiliser ensuite que $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$.)

(c) Montrer que l'application $f\colon \{\mathrm{id}, \tau\} \times H \to G$ donnée par $(s, h) \mapsto sh$ (pour $s \in \{\mathrm{id}, \tau\}$ et $h \in H$) est un isomorphisme de groupes.

(d) Soit $M = N \cap \mathbb{R}$. Montrer que $M = N^{\{\mathrm{id},\tau\}}$. En déduire que $M/\mathbb{Q}$ est un extension galoisienne et que $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{S}_3$.

(e) Pour chacun des entiers $d' = 1, 2, 3, 6$, trouver le nombre de sous-corps M' de M avec $[M' : \mathbb{Q}] = d'$.

Lesquels d'entre ces corps sont des extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$?