Université Louis Pasteur 4 juin 2008
Département de Mathématiques

Master de mathématiques 1ère année

Algèbre M1S2

Durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Il sera tenu compte de la qualité et de la rigueur de la rédaction. En particulier toutes les réponses doivent être justifiées d'après les résultats prouvés dans le cours ou en TD.
Toutefois, dans chaque partie des exercices 1 et 2, vous pouvez vous servir des parties précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les faire.

1. On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 4X^3 + 15X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. On note $L \subset \mathbb{C}$ un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(a) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(b) Monter que $L/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.

(c) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que les racines de P sont $\alpha, \alpha^{-1}, \beta$ et β^{-1}.

(d) On pose $A = \alpha + \alpha^{-1}$ et $B = \beta + \beta^{-1} \in L$. En étudiant l'orbite de A sous l'opération de G, montrer que $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(B)$ et que le polynôme minimal de A sur $\mathbb{Q}$ est $X^2 + 4X + 13$.
En déduire que $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(i)$.

(e) Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(A))$ tel que $\sigma(\alpha) = \alpha^{-1}$. Montrer que le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}(A)$ est $X^2 - AX + 1$.
Déterminer aussi le polynôme minimal de β sur $\mathbb{Q}(A)$.

(f) Montrer qu'il existe un élément $\delta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ tel que $\delta^2 = A^2 - 4$ et que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(A, \delta) = \mathbb{Q}(i, \delta)$.
Pour σ comme dans **1.**(e), déterminer $\sigma(\delta)$.

(g) Montrer que $(A^2 - 4)(B^2 - 4) = 225 = 15^2$.

t.s.v.p.

(h) En étudiant les discriminants des polynômes minimaux de α et de β sur $\mathbb{Q}(A)$, montrer que $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et en déduire que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(i) Montrer qu'il existe $\tau \in G$ vérifiant $\tau(\alpha) = \beta$.
Montrer que $\delta\tau(\delta) \in \mathbb{Q}$ et en déduire que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(j) Montrer que $(\delta + \tau(\delta))^2 \in \mathbb{Q}$.

(k) Trouver toutes les extensions de $\mathbb{Q}$ contenues dans L.

2. Soient K un corps de caractéristique 0 et L une extension finie de K. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.

On a besoin d'un résultat préliminaire :

Lemme. *Soient k un corps infini et V un k-espace vectoriel. On considère une famille finie $W_1, \ldots, W_n$ de sous-espaces vectoriels de V avec $W_i \neq V$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\cup_{i=1}^{n} W_i \neq V$.*

Le but des deux premières parties est de montrer ce lemme.

(a) Supposez qu'il existe des vecteurs $v \notin \cup_{i=1}^{n-1} W_i$ et $w \notin W_n$. Montrer qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $v + \lambda w \notin \cup_{i=1}^{n} W_i$.

(b) Montrer le lemme par récurrence sur n.

On retourne à l'énoncé de départ, soit donc L/K une extension finie de corps de caractéristique 0.

(c) Montrer qu'il existe une extension M de L telle que M est une extension galoisienne finie de K.

(d) Montrer que le nombre d'extensions de K contenues dans L est fini.

(e) Montrer qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.