

Présentation des travaux scientifiques

Introduction

Ce document a pour but de donner une vue d'ensemble du contexte et des principaux résultats de mes travaux, en particulier les articles reproduits dans le dossier. Quoiqu'il s'agisse d'un travail original, je n'ai pas inclus de discussion sur le mémoire [25], rédigé sous la direction de J. H. M. Steenbrink en vue de l'obtention du diplôme « doctoraal ».

Le premier article dont le contenu est exposé dans ce résumé est [5]. Celui-ci trouve son origine dans le sujet de recherche (la conjecture de Coleman exposée dans la section 2) qui m'était proposée par mon directeur de thèse F. Oort. La principale raison d'inclure cet article, relativement peu lié au reste de mon travail, dans ce résumé, est le fait que celui-ci a joué un rôle important dans l'orientation de la suite de mes recherches, à commencer par ma thèse de doctorat [26].

Mes travaux depuis la thèse concernent deux domaines assez étroitement liés. Il s'agit d'une part de la théorie des variétés de Shimura et des questions arithmétiques les concernant, notamment des questions de construction de modèles en caractéristique mixte. Pour cette raison, je donne, dans la section 1, un aperçu de la théorie des variétés de Shimura. La section 3 traite mon travail touchant à la construction de modèles en caractéristique mixte. Dans la section 7 on trouve une étude détaillée de familles de variétés abéliennes paramétrées par des variétés de Shimura construites par Mumford. Dans chaque cas, les résultats trouvent des applications dans le deuxième domaine concerné par mes travaux.

Ce deuxième domaine de recherche concerne l'étude de représentations ℓ -adiques du groupe de Galois absolu d'un corps de nombres, et plus particulièrement des représentations provenant de la cohomologie ℓ -adique de variétés abéliennes. D'une part, on considère, dans les sections 4 et 8, comment on peut déduire certaines propriétés de bonne réduction et de réduction ordinaire d'une variété abélienne des propriétés des représentations galoisiennes associées. D'autre part, on peut utiliser des variétés de Shimura pour étudier des questions concernant les représentations galoisiennes elles-mêmes. Cette démarche porte surtout ses fruits si l'on considère des problèmes faisant

intervenir les groupes de Mumford–Tate des variétés abéliennes en question.

Mes derniers travaux, exposés dans les sections 9 et 10, concernent une conjecture de Fontaine et Mazur. Ceux-ci ont conjecturé qu’une représentation galoisienne avec certaines propriétés de bonne réduction provient d’un groupe de cohomologie étale d’une variété algébrique. Dans une première prépublication dédiée à ce sujet, je construis des représentations avec les propriétés en question et je montre qu’elles viennent effectivement de variétés algébriques. Un deuxième travail, encore en cours, vise à vérifier des conséquences « motiviques » de la conjecture de Fontaine et Mazur. Les premiers résultats ont tendance à confirmer la conjecture ou certains de ces corollaires.

1 Variétés de Shimura

Même si l’étude moderne des variétés de Shimura débute avec les travaux de Shimura, certaines de ces variétés ont été étudiées depuis beaucoup plus longtemps. Par exemple, la droite affine $\mathbf{A}^1$ sur $\mathbf{Q}$ est le modèle canonique (sur le corps des rationnels $\mathbf{Q}$) d’une variété de Shimura. En tant que variété analytique, $\mathbf{C} = \mathbf{A}^1(\mathbf{C})$ est le quotient du demi plan de Poincaré $\mathbf{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \text{im } \tau > 0\}$ par l’action du groupe arithmétique $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ par homographies,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

La fonction modulaire $j : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ correspond à la projection canonique. On constate que le quotient (analytique) de $\mathbf{H}$ par l’action de $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ est l’espace analytique des points complexes d’une variété algébrique quasi-projective sur $\mathbf{C}$ et que cette variété algébrique possède un modèle sur un corps de nombres, en l’occurrence le corps des rationnels $\mathbf{Q}$.

Dans ce cas classique, l’existence d’une structure (par ailleurs peu canonique à première vue) de $\mathbf{Q}$ -variété sur le quotient $\text{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}$ semble assez triviale. Pourtant cette structure cache une interprétation arithmétique extrêmement riche, en terme de modules de courbes elliptiques. Pour $\tau \in \mathbf{H}$, on considère la courbe elliptique E_τ sur $\mathbf{C}$ définie par $E_\tau(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$. Par courbe elliptique sur $\mathbf{C}$, on entend ici une courbe algébrique projective et lisse sur $\mathbf{C}$ de genre 1 et $E_\tau(\mathbf{C})$ désigne l’espace analytique de ses points à valeurs dans $\mathbf{C}$. La valeur $j(\tau)$ est l’invariant modulaire de la courbe E_τ , c’est-à-dire que, si E_τ peut être donnée par l’équation affine $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$, alors

$$j(\tau) = \frac{1728g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}.$$

Il est bien connu que $E_\tau \cong E_{\tau'}$ si et seulement si $j(\tau) = j(\tau')$, ce qui implique que la variété $\mathbf{A}^1$ est un espace de modules (grossier) pour les courbes elliptiques. La structure de $\mathbf{Q}$ -variété donnée ici est la seule avec la propriété que si la courbe $E_\tau/\mathbf{C}$ admet un modèle sur un corps $K \subset \mathbf{C}$, alors $j(\tau) \in \mathbf{A}^1(K)$. Ceci donne un sens au fait que $\mathbf{A}^1$ est le modèle canonique sur $\mathbf{Q}$ de la variété $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}$.

La théorie des variétés de Shimura généralise cet exemple. Soit $\mathbf{H}$ un domaine hermitien symétrique et soit Γ un groupe arithmétique agissant proprement discontinument sur $\mathbf{H}$. Un théorème de Baily et Borel (voir [2]) implique que le quotient $\Gamma \backslash \mathbf{H}$ est alors l'espace analytique associé à une variété quasi-projective sur $\mathbf{C}$. Shimura (voir exemple [44] et [45]) a montré, pour beaucoup de ces variétés, l'existence de modèles, dits canoniques, sur des corps de nombres.

Dans la suite, on utilisera le langage de Deligne, exposé dans [6] et [8], pour donner une esquisse de la théorie. Pour cela, soit $S = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m$ la restriction de scalaires du groupe multiplicatif, donc le groupe algébrique sur $\mathbf{R}$ tel que $S(A) = \mathbf{G}_m(A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ pour tout $\mathbf{R}$ -algèbre A . On note z et $\bar{z}$ les caractères (complexes) de S . Soit G un groupe algébrique réductif sur $\mathbf{Q}$, soit $G(\mathbf{R})^+$ la composante connexe (topologique) de $G(\mathbf{R})$ et soit X une $G(\mathbf{R})^+$ -classe de conjugaison de morphismes $S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$. Via la représentation adjointe de G sur $\mathrm{Lie}(G)$, tout élément $h \in X$ définit une structure de Hodge sur $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbf{R}}$ et, comme X est une classe de conjugaison, le type de cette structure de Hodge ne dépend pas de h . On dit que (G, X) est une *donnée de Shimura* si

- (S1) tout $h \in X$ induit une structure de Hodge de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$ sur $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbf{R}}$,
- (S2) l'involution $\mathrm{int}(h(i))$ induit une involution de Cartan de $G_{\mathbf{R}}^{\mathrm{ad}}$ et
- (S3) le groupe G^{ad} n'admet pas de facteur sur $\mathbf{Q}$ sur lequel la projection de h soit triviale.

La condition S2 veut dire que le tordu de G correspondant à l'involution $\mathrm{int}(h(i))$ est compact. Sous les conditions S1–S3, X est naturellement munie de la structure de domaine hermitien symétrique. Réciproquement, tout domaine hermitien symétrique peut être obtenu comme une classe de conjugaison de morphismes de S dans un groupe algébrique sur $\mathbf{R}$.

Soient $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles et $\mathbf{A}_f$ l'anneau des adèles finis de $\mathbf{Q}$. Pour tout groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbf{A}_f)$ on pose

$${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q}) \backslash (X \times (G(\mathbf{A}_f)/K)).$$

C'est un espace analytique qui est la réunion disjointe de quotients du domaine hermitien symétrique X par des sous-groupes arithmétiques de $G(\mathbf{Q})$. Le théorème de Baily–Borel cité plus haut implique alors que ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)(\mathbf{C})$ est l'espace analytique

des points complexes d'un $\mathbf{C}$ -schéma quasi-projectif ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$ (ce qui justifie, à posteriori, les notations utilisées).

Pour une donnée de Shimura (G, X) et $h \in X$, on définit le cocaractère

$$\mu_h: \mathbf{G}_{m, \mathbf{C}} \rightarrow G_{\mathbf{C}}$$

comme étant le composé de $r: \mathbf{G}_{m, \mathbf{C}} \rightarrow S_{\mathbf{C}}$, dual du caractère z , et de $h_{\mathbf{C}}: S_{\mathbf{C}} \rightarrow G_{\mathbf{C}}$. La classe de conjugaison de μ_h ne dépend que de (G, X) et on définit le *corps dual* $E(G, X)$ comme étant le corps de définition dans $\mathbf{C}$ de cette classe de conjugaison. Le modèle canonique de la variété de Shimura ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$ est un modèle sur le corps dual $E(G, X)$ vérifiant une condition arithmétique.

Pour énoncer cette condition, on considère d'abord le cas particulier où le groupe $G = T$ est un tore. Dans ce cas, la classe de conjugaison X est réduit à un point h et les variétés de Shimura ${}_K M_{\mathbf{C}}(T, \{h\})$ sont finies. En écrivant simplement E pour le corps dual $E(T, \{h\})$ et en utilisant le morphisme $\mu = \mu_h: \mathbf{G}_{m, E} \rightarrow T_E$ défini ci-dessus, on définit

$$E^* \xrightarrow{\text{Res } \mu} \text{Res}_{E/\mathbf{Q}} T_E \xrightarrow{N_{E/\mathbf{Q}}} T,$$

où E^* désigne le groupe algébrique $\text{Res}_{E/\mathbf{Q}} \mathbf{G}_m$ et $\text{Res } \mu$ est le morphisme obtenu par restriction de scalaires à partir de μ . Comme la théorie des corps de classes fournit un isomorphisme $\lambda: \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_0(E^*(\mathbf{Q}) \backslash E^*(\mathbf{A}))$, on en déduit, pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset T(\mathbf{A}_f)$, un morphisme

$${}_K r_E(T, \{h\}): \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)^{\text{ab}} \rightarrow T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}_f)/K,$$

défini par λ^{-1} et le composé $N_{E/\mathbf{Q}} \circ \text{Res } \mu$. Ceci induit une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ sur la variété finie ${}_K M_{\mathbf{C}}(T, \{h\})$, la munissant de la structure de E -schéma (fini). Tout ceci est fonctoriel en K et on obtient ainsi le système des modèles canoniques des ${}_K M_{\mathbf{C}}(T, \{h\})$.

Retournons au cas général de la variété de Shimura ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$. Un *modèle canonique* de cette variété est un modèle ${}_K M(G, X)$ de ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$ sur $E(G, X)$ avec la propriété que, pour tout morphisme de données de Shimura $(T, \{h\}) \rightarrow (G, X)$ avec T un tore, les morphismes ${}_K M_{\mathbf{C}}(T, \{h\}) \rightarrow {}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)$ se descendent sur le composé $E(G, X)E(T, \{h\})$. Notons ici que les points de ${}_K M(G, X)$ qui sont dans l'orbite sous l'action de $G(\mathbf{A}_f)$ par correspondances de l'image d'un des morphismes

$${}_K M(T, \{h\}) \rightarrow {}_K M(G, X)$$

(pour T variable) sont appelés les *points spéciaux* de ${}_K M(G, X)$.

Il est connu, voir par exemple [6, §5], qu'une variété de Shimura admet, à isomorphisme près, au plus un modèle canonique. Le fait que les points spéciaux d'une variété

de Shimura forment un sous-ensemble dense (pour la topologie euclidienne) joue un rôle important dans la démonstration de ce fait. L'existence d'un modèle canonique est connu dans de très nombreux cas, cf. [8].

Soit (G, X) une donnée de Shimura et soit V une représentation $\mathbf{Q}$ -linéaire de G . Tout $h \in X$ induit une structure de Hodge sur V et la condition S2 implique que cette structure est polarisable. Comme X est une classe de conjugaison, le type de cette structure de Hodge ne dépend pas de $h \in X$. On peut en déduire une variation de $\mathbf{Q}$ -structures de Hodge sur les variétés de Shimura ${}_K M_{\mathbf{C}}(G, X)(\mathbf{C})$.

Un cas particulièrement intéressant se produit si G admet une représentation symplectique V telle que le type commun de ces structures de Hodge est $\{(-1, 0), (0, -1)\}$. On obtient alors, pour chaque sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbf{A}_f)$ suffisamment petit, une variété de Shimura qui peut être considérée comme espace de modules de variétés abéliennes, munies de certaines structures supplémentaires. De telles variétés de Shimura sont appelées *de type Hodge*. Mes travaux concernent uniquement des variétés de Shimura de ce type.

Un cas encore plus particulier se produit pour des variétés de Shimura paramétrisant des familles de variétés abéliennes de type PEL. Une telle variété de Shimura peut être interprétée comme espace de modules pour des variétés abéliennes (de dimension fixe g) munies de structures supplémentaires qui sont purement algébriques, à savoir

- (P) une polarisation,
- (E) une action par un anneau (ou une algèbre) d'endomorphismes et
- (L) une structure de niveau (level structure).

Du fait que des structures de type PEL peuvent être définies sur n'importe quelle base, des variétés de Shimura de ce type peuvent être étudiés avec des techniques classiques de géométrie algébriques comme celles de Schlessinger [37] et de Mumford [24].

Le premier exemple des variétés de type PEL est celui où l'anneau d'endomorphismes est trivial (réduit à $\mathbf{Z}$) et on trouve alors les espaces de modules des variétés abéliennes polarisées de dimension g et munies de structures de niveau. Dans [24], on trouve la construction de Mumford qui établit l'existence de ces espaces de modules $\mathcal{A}_{g, \lambda, n}$ sur $\mathbf{Q}$. Dans le cas des variétés abéliennes principalement polarisées, on écrira $\mathcal{A}_{g, n}$ pour l'espace de modules et dans le cas où, en plus, la structure de niveau est triviale, on le note $\mathcal{A}_g$.

Le fait qu'un espace de modules de type PEL est le modèle canonique de la variété de Shimura correspondant s'ensuit du fait que les points spéciaux correspondent aux variétés abéliennes de type CM. On utilise la description par Shimura et Taniyama [46] du comportement des classes d'isomorphie des variétés abéliennes de type CM et de la torsion de ces variétés sous l'action du groupe de Galois.

Rappelons que l'on dit qu'une variété abélienne A définie sur un corps K est *de type*

CM s'il existe un produit fini $\prod E_i$ de corps (commutatifs) tel que $\sum [E_i : \mathbf{Q}] = 2 \dim A$ et une injection $\prod E_i \hookrightarrow \text{End}^0(A_{K^{\text{sep}}}) = \text{End}(A_{K^{\text{sep}}}) \otimes \mathbf{Q}$.

2 Une conjecture de Coleman

Dans [3], Coleman a conjecturé que pour tout entier $g \geq 4$ fixé, il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de courbes algébriques projectives et lisses C sur $\mathbf{C}$ telles que la jacobienne $\text{Jac}(C)$ soit de type CM. Dans [5], il est montré que cette conjecture est fausse pour $g = 4$ et pour $g = 6$. Pour les autres valeurs de g elle est, à ma connaissance, toujours ouverte.

Les exemples donnés dans [5] font apparaître des variétés de Shimura qui sont de type PEL, donc en particulier de type Hodge. On considère des familles de courbes projectives et lisses (sur $\mathbf{C}$) dépendant d'un ou plusieurs paramètres, par exemple

$$y^5 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Cette équation définit une famille de courbes projectives et lisses de genre 4, $C \rightarrow M$, où $M = \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1 \setminus \{0, 1\}$. L'application de Torelli $j : M \rightarrow \mathcal{A}_4$ envoie $\lambda \in M(\mathbf{C})$ sur le point $j(\lambda) \in \mathcal{A}_4(\mathbf{C})$ correspondant à $\mathcal{J}_\lambda = \text{Jac}(C_\lambda)$.

Comme C/M possède un automorphisme d'ordre 5 donné par $(x, y) \mapsto (x, e^{2i\pi/5}y)$, on obtient une inclusion $\mathbf{Q}[\zeta_5] \hookrightarrow \text{End}^0(\mathcal{J}_\lambda)$ pour tout $\lambda \in M(\mathbf{C})$. Ici ζ_5 désigne une racine primitive 5ème de l'unité. Il s'ensuit assez facilement que M s'envoie dans une variété de Shimura de type PEL et un calcul de dimensions montre que $j(M)$ est en effet une composante de cette variété de Shimura. Les faits que les points spéciaux sont denses et que ces points correspondent à des variétés abéliennes de type CM impliquent alors qu'il existe un nombre infini de courbes complexes de genre 4 dont la jacobienne est de type CM.

L'exemple donné ici montre en effet un résultat un peu plus fort que celui exposé ci-dessus. Pour l'énoncer, on n'a besoin que du fait que $j(M)$ est une composante connexe d'une variété de Shimura de type PEL. Il est nécessaire d'introduire la structure de groupe de Serre–Tate sur l'espace de déformations d'une variété abélienne ordinaire sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive. L'article de Katz [18] est une excellente référence pour cette théorie.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et A_0/k une variété abélienne *ordinaire* de dimension g , ce qui veut dire que le module de Tate

$$T_p A_0 = \varprojlim A_0[p^n](k)$$

est de rang g . Le foncteur des déformations de A_0 est le foncteur $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$, sur la catégorie des anneaux locaux artiniens R avec corps résiduel k , donné par

$$\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}(R) = \{A/R \text{ variété abélienne, munie de } A_k \cong A_0\} / \cong.$$

Dans le cas d'une variété abélienne ordinaire, ce foncteur est strictement pro-représentable (dans le sens de Schlessinger [37]) par le $W(k)$ -schéma formel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p} \left(T_p A_0 \otimes T_p A_0^t, \widehat{\mathbf{G}}_m \right).$$

Ici $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k , on écrit A_0^t pour la variété abélienne duale de A_0 et $\widehat{\mathbf{G}}_m$ est le complété formel du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,W(k)}$ le long de la section unité. Cette description de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ implique en particulier que cet espace de déformations est canoniquement muni de la structure de groupe formel sur $W(k)$. Pour tout anneau R comme ci-dessus, le relèvement de A_0 correspondant à la section unité de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}(R)$ est appelé le *relèvement canonique* de A_0 . En passant à la limite sur les $W(k)/p^n$, on obtient un schéma formel $\widehat{A}_0^{\mathrm{can}}$ sur $W(k)$ qui relève A_0 . Comme une polarisation de A_0 se relève à $\widehat{A}_0^{\mathrm{can}}$, ce schéma formel est le complété d'un schéma abélien A_0^{can} sur $W(k)$, toujours appelé le relèvement canonique de A_0 . L'anneau des endomorphismes de A_0^{can} est égal à celui de A_0 . Dans le cas où k est une clôture algébrique d'un corps fini, cela implique que le relèvement canonique est de type CM. De façon similaire, on construit des relèvements de A_0 sur des extensions cyclotomiques de $W(k)$ correspondant aux points de torsion de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$. Ces relèvements, dits *quasi-canoniques*, ont la même algèbre d'endomorphismes que A_0 et sont donc toujours de type CM si k est une clôture algébrique d'un corps fini. Réciproquement, tout relèvement de A_0 en caractéristique 0 qui est de type CM est un relèvement quasi-canonique.

Supposons que la variété A_0 soit munie d'une polarisation principale λ_0 , comme c'est le cas pour la réduction de la jacobienne d'une courbe. On peut alors déterminer le sous-espace $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0, \lambda_0}$ de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ correspondant aux déformations A de A_0 auxquels la polarisation se relève. Moyennant λ_0 , on identifie les modules de Tate $T_p A_0$ et $T_p A_0^t$ et $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ s'identifie alors à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p A_0 \otimes T_p A_0, \widehat{\mathbf{G}}_m)$. Les résultats de [18] impliquent que $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0, \lambda_0}$ est le sous-espace des applications symétriques. En particulier, il s'agit d'un sous-groupe de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$.

Pour tout entier n premier à p , l'espace de modules $\mathcal{A}_{g,n}$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g et munies d'une structure de niveau n admet un modèle sur $\mathbf{Z}[1/n]$, toujours noté $\mathcal{A}_{g,n}$. Une variété abélienne ordinaire A_0 , munie d'une polarisation principale λ_0 et d'une structure de niveau, correspond à un point $a_0 \in \mathcal{A}_{g,n}(k)$ et le complété de $\mathcal{A}_{g,n}$ en a_0 s'identifie à $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0, \lambda_0}$. Ce qui précède implique donc que ce complété est naturellement muni de la structure de groupe formel.

Soit M une variété de Shimura de type PEL contenue dans $\mathcal{A}_{g,n,\overline{\mathbf{Q}}}$, ou une composante connexe d'une telle variété de Shimura, et supposons que l'adhérence $\mathcal{M}$ de M dans $\mathcal{A}_{g,n}$ contient le point a_0 . Soit E l'algèbre des endomorphismes faisant partie des structures PEL imposés sur la variété de Shimura M . Alors tout point de M correspond à une variété abélienne A avec $E \subset \mathrm{End}^0(A)$ et M est l'espace de modules de variétés

abéliennes principalement polarisées, munies d’une structure de niveau et d’une certaine action de E par isogénies (ou une composante d’un tel espace de modules). Le fait que $a_0 \in \mathcal{M}(k)$ implique que A_0 est également munie d’une action de E . Le complété de $\mathcal{M}$ en a_0 est un sous-schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{A_0} \subset \widehat{\mathcal{A}}_{A_0, \lambda_0}$. Il est clair que $\widehat{\mathcal{M}}_{A_0}$ est contenu dans le sous-espace de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0, \lambda_0}$ paramétrisant les déformations de A_0 auxquelles l’action de E se relève. Les résultats de [18] montrent que ce sous-espace est un sous-groupe et un calcul de dimensions montre que ce sous-groupe est de la même dimension que M . Il s’ensuit que $\widehat{\mathcal{M}}_{A_0}$ est réunion finie de translatés de sous-tores formels de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ sur des points de torsion. On déduit en particulier que pour tout point de M correspondant à une variété abélienne A ayant bonne réduction ordinaire en p , il existe un nombre infini de points spéciaux de M correspondant à des variétés abéliennes avec la même réduction modulo p que A .

Pour la conjecture de Coleman, ceci a pour conséquence que même le nombre de courbes algébriques avec réduction modulo p donnée et dont la jacobienne est de type CM parfois infini. La finitude conjecturée n’est donc même pas vraie localement, au moins pour $g = 4$ et $g = 6$.

3 Linéarité des variétés de Shimura de type Hodge

Soient, comme avant, (G, X) une donnée de Shimura et $M = {}_K M(G, X)$ le modèle canonique sur $E = E(G, X)$ de la variété de Shimura associé à un sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbf{A}_f)$. Soient V une représentation de G de type Hodge $\{(-1, 0), (0, -1)\}$ donnant une application $M \rightarrow \mathcal{A}_{g,n,E}$ et $\mathcal{M}$ l’adhérence de M dans $\mathcal{A}_{g,n,O_E}$. On vient de voir que, si la famille de variétés abéliennes définie par ces données est de type PEL, alors le complété de $\mathcal{M}$ dans un point en caractéristique p correspondant à une variété abélienne ordinaire A_0 est la réunion de translatés d’un sous-tore formel de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ (pour la structure de groupe de Serre–Tate).

Un exemple dû à Mumford, donné dans [23] et résumé dans la section 7, montre qu’il existe des variétés de Shimura de type Hodge avec une interprétation modulaire qui ne soit pas de type PEL. Il est naturel de se poser la question si l’énoncé ci-dessus est vrai pour toutes les variétés de Shimura de type Hodge. Cette question était le sujet principal de ma thèse de doctorat [26] où on trouve une réponse affirmative. Le théorème suivant, publié dans [29], généralise légèrement le résultat de ma thèse. Dans l’énoncé, $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbf{Z}[1/n]$ est l’espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g et munies d’une structure de niveau n , k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ ne divisant pas n et K est le corps des fractions de l’anneau des vecteurs de Witt $W(k)$.

Théorème. *Soient $M \subset \mathcal{A}_{g,n,E}$ l’image d’une variété de Shimura de type Hodge et*

$\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_{g,n}$ l'adhérence de M comme ci-dessus. Supposons que K' soit une extension finie de K et $a \in M(K')$ un point tel que la variété abélienne A correspondant à a a bonne réduction ordinaire A_0 modulo l'idéal maximal. Soit $a_0 \in \mathcal{A}_{g,n}(k)$ le point correspondant à A_0 . Alors la complétée $\widehat{\mathcal{M}}_{A_0}$ de $\mathcal{M}$ en a_0 contient une unique composante irréductible

$$C \subset \widehat{\mathcal{M}}_{A_0} \subset \widehat{\mathcal{A}}_{A_0} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p} \left(T_p A_0 \otimes T_p A_0^t, \widehat{\mathbf{G}}_m \right)$$

contenant a . En plus, C est le translaté d'un sous-tore formel de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ sur un point de torsion.

Pour donner une idée de la démonstration de ce théorème, on a besoin d'une deuxième interprétation de la structure de groupe de Serre–Tate. Cette interprétation repose sur une description donnée par Deligne et Illusie [11] de la structure de la cohomologie de De Rham de la déformation universelle de A_0 sur $\mathcal{A}_{A_0}$.

Soient R l'anneau des fonctions de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$, de sorte que $R \cong W(k)[[t_1, \dots, t_{g^2}]]$, et soit $R_0 = R/(p)$. En choisissant un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{A_0} \cong \widehat{\mathbf{G}}_m^{g^2}$$

on obtient un système $(q_{i,j})_{i,j=1,\dots,g}$ de *coordonnées canoniques* dans R . On peut choisir l'isomorphisme ci-dessus tel que $\mathcal{A}_{A_0, \lambda_0}$ soit donné par les équations $q_{i,j} = q_{j,i}$, ce qui présente un avantage esthétique. Soit H le premier groupe de cohomologie de De Rham de la déformation universelle de A_0 sur $\mathcal{A}_{A_0}$. Il est bien connu que H est un R -module libre de rang $2g$, naturellement muni de la structure d'un F -cristal de Hodge ordinaire de niveau ≤ 1 . En particulier, H est muni

- d'une filtration de Hodge, notée Fil , de longueur ≤ 1 ,
- d'une connection intégrable $\nabla: H \rightarrow H \otimes_R \Omega_{R/W(k)}$ et,
- pour tout relèvement $\phi: R \rightarrow R$ du frobenius de R_0 , d'un automorphisme ϕ -linéaire $F(\phi)\phi^*: H \rightarrow H$.

On a une décomposition $H = U \oplus \mathrm{Fil}^1 H$ telle que $F(\phi)\phi^*$ soit inversible sur U pour tout ϕ et il existe des bases $(a_1, \dots, a_g)$ de U et $(b_1, \dots, b_g)$ de $\mathrm{Fil}^1 H$ jouissant des propriétés de transformation très particulières sous ∇ et sous les $F(\phi)\phi^*$. Entre autres, on a $\nabla a_i = 0$, $F(\phi)\phi^* a_i = a_i$ et

$$\nabla b_i = \sum_{j=1}^g a_j \otimes d \log q_{i,j},$$

où les $q_{i,j}$ sont les coordonnées canoniques introduites ci-dessus. On ne donne pas ici la formule pour $F(\phi)\phi^* b_i$. L'équation pour les ∇b_i indique une relation entre la structure de groupe de Serre–Tate et la structure de H .

Retournons à la variété de Shimura M , associée à une donnée de Shimura (G, X) . On supposera dans la suite que l'entier n soit assez grand pour que $\mathcal{A}_{g,n}$ soit un espace de modules fin. Il existe alors un schéma abélien universel $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}_{g,n}$ et la restriction de $\mathcal{X}$ à M porte des classes de Hodge

$$\xi_i \in H^1(\mathcal{X}_M/M)^{\otimes 2n_i}.$$

On fixe un nombre fini de telles classes tel que G soit le groupe fixant l'ensemble des ξ_i . Les classes ξ_i sont horizontaux pour la connection de Gauß-Manin, appartiennent au cran Fil^{n_i} pour la filtration de Hodge et sont rationnelles dans tout point de $M(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à la cohomologie euclidienne de $\mathcal{X}_M(\mathbf{C})/M(\mathbf{C})$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$, cf. la section 5. Les classes ξ_i donnent des classes, notées $\hat{\xi}_i$, dans $H_{\mathcal{M}}$, la restriction à $\widehat{\mathcal{M}}_{A_0}$ du F -cristal H . On a $\nabla \hat{\xi}_i = 0$ et $\hat{\xi}_i \in \text{Fil}^{n_i} H_M$ et on peut montrer que les ξ_i se transforment sous frobenius par

$$F(\phi)\phi^*\hat{\xi}_i = p^{n_i}\hat{\xi}_i,$$

pour tout ϕ .

En utilisant la description du R -module H donnée ci dessus, on montre qu'il existe un sous-schéma formel irréductible maximal $\mathcal{C} \subset \widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ tel que les classes $(\xi_i)_a$ se prolongent à des classes $\hat{\xi}_i \in H_{\mathcal{C}}$ avec les propriétés citées. On montre ensuite que $\mathcal{C}$ est le translaté d'un sous-tore formel de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$ par un point de torsion et que $\dim \mathcal{C} = \dim M$. Le théorème s'ensuit.

Signalons que dans [26, 3.2], un algorithme est donné pour déterminer les équations de $\mathcal{C}$ en termes de la structure de Serre–Tate, à partir de la donnée de Shimura (G, X) définissant M . Ce résultat n'a pas été publié ailleurs que dans ma thèse [26].

Pour terminer cette section, notons que dans [20] and [21], Moonen montre que le réciproque du théorème est également vrai. Si le complété d'une sous-variété connexe $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_{g,n}$ en un point correspondant à une variété abélienne ordinaire A_0 est le translaté d'un sous-tore formel de $\widehat{\mathcal{A}}_{A_0}$, alors la fibre générique $\mathcal{M}_{\overline{\mathbf{Q}}}$ est une composante connexe de l'image d'une variété de Shimura de type Hodge.

4 Représentations galoisiennes et réduction ordinaire

Un autre résultat de ma thèse de doctorat concerne un critère pour qu'une variété abélienne sur un corps de nombres K ait réduction ordinaire en un grand nombre de places de K . Ceci généralise un théorème d'Ogus [33] affirmant que pour une surface abélienne A/K , il existe une extension finie K' de K telle que l'ensemble de places de K' où $A_{K'}$ ait bonne réduction ordinaire a densité de Dirichlet égale à 1. De tels résultats sont utiles en vue de la condition de réduction ordinaire présente dans le théorème de la section 3.

Avant d'énoncer le critère, commençons par quelques rappels concernant les représentations galoisiennes ℓ -adiques associées aux variétés algébriques et en particulier aux variétés abéliennes. Ces rappels seront d'ailleurs utiles dans toute la suite de ce document.

Soient pour l'instant K un corps quelconque, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de K et A une variété algébrique sur K . On fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K et on pose $G_K = \text{Aut}_K(\bar{K})$. Pour des entiers i et n on peut définir les groupes de cohomologie étale de A à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ notés $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$, voir par exemple [19]. Cette construction est fonctorielle en $A_{\bar{K}}$ et il s'ensuit que G_K agit naturellement (et continûment) sur les groupes $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$. Pour i fixe et n variable, les $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ forment un système projectif et on pose

$$H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell}) = \varprojlim H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$$

et $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbf{Z}_{\ell}} \mathbf{Q}_{\ell}$. Ainsi $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell})$ (resp. $H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_{\ell})$) est un $\mathbf{Z}_{\ell}$ -module (resp. $\mathbf{Q}_{\ell}$ -espace vectoriel) muni d'une action continue de G_K .

On s'intéressera particulièrement au cas où A est une variété abélienne. Dans ce cas, la cohomologie étale ℓ -adique de A est étroitement liée au ℓ -module de Tate $T_{\ell}A$ de A (voir la section 2), également muni de l'action naturelle de G_K . On a les isomorphismes G_K -équivalents

$$H_{\text{ét}}^i(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \cong \wedge^i H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell})$$

et $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}_{\ell}}(T_{\ell}A, \mathbf{Z}_{\ell})$. De [27], on cite le théorème suivant, qui généralise le théorème [26, 3.3] de ma thèse.

Théorème. *Soit A une variété abélienne de dimension 2^{2k} sur un corps de nombres K . Supposons que, pour un nombre premier ℓ , l'adhérence de Zariski G_{ℓ} de l'image de la représentation de G_K sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_{\ell})$ vérifie*

$$\text{Lie}(G_{\ell}) \cong \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{sl}(2)^{2k+1},$$

avec $\mathfrak{c}$ central vérifiant $\dim \mathfrak{c} = 1$ et où $\mathfrak{sl}(2)^{2k+1}$ opère sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_{\ell})$ par le produit tensoriel des représentations naturelles des facteurs. Alors il existe une extension finie K' de K et un ensemble P de places de K' de densité 1 tels que $A_{K'}$ a bonne réduction ordinaire en toute place $v \in P$.

Pour montrer le théorème on choisit d'abord une extension finie $K' \supset K$ suffisamment grande. On considère ensuite l'ensemble P des valuations non-ramifiées v de K' , de caractéristique résiduelle différente de ℓ et de hauteur 1, telles que $A_{K'}$ a bonne réduction en v et telles que l'image du frobenius en v engendre un tore maximal de G_{ℓ} . Il est connu que P est de densité 1. Il suffit de montrer que $A_{F'}$ a réduction ordinaire

en toute place de P . Soient $v \in P$, p la caractéristique résiduelle en v et $\text{Fr}_v \in \mathcal{G}_{K'}$ un élément de Frobenius en v . Les valeurs propres de Fr_v agissant sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques. Il suffit de montrer que, pour une valuation p -adique w fixé de $\overline{\mathbf{Q}}$, la moitié des valeurs propres de Fr_v sont des unités w -adiques. Ceci se fait en s'inspirant des arguments de [33] et en utilisant les relations (multiplicatives) entre ces valeurs propres, imposées par la condition sur G_ℓ .

5 Autour de la conjecture de Mumford–Tate

Certains de mes travaux sont inspirés par la conjecture de Mumford–Tate et pour d'autres il y a également besoin d'introduire la notion de groupe de Mumford–Tate d'une variété abélienne.

Soient K un corps et A une variété algébrique propre et lisse de dimension d sur K . Sur A , on considère le complexe

$$\Omega_{A/K} = \left[\mathcal{O}_{A/K} \rightarrow \Omega_{A/K}^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{A/K}^d \right].$$

La cohomologie de De Rham de A est par définition la hypercohomologie de ce complexe (dans la topologie de Zariski), $H_{\text{DR}}^i(A/K) = \mathbf{H}^i(A, \Omega_{A/K})$. Les $H_{\text{DR}}^i(A/K)$ sont des K -espaces vectoriels de dimensions finies. La filtration bête σ de $\Omega_{A/K}$ par

$$\sigma_{\geq p}(\Omega_{A/K})^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ \Omega_{A/K}^k & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

induit la suite spectrale de Hodge

$$E_1^{pq} = H^p(A, \Omega_{A/K}^q) \Rightarrow H_{\text{DR}}^{p+q}(A/K),$$

dont l'aboutissement est la *filtration de Hodge* Fil sur la cohomologie de De Rham. Ainsi on associe à A des groupes de cohomologie de De Rham, munis de la filtration de Hodge.

Supposons qu'il existe un plongement $\sigma: K \rightarrow \mathbf{C}$. Par changement de base, on obtient une variété $A_{\mathbf{C}} = A_{\sigma, \mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$ et la topologie euclidienne de $\mathbf{C}$ induit la topologie euclidienne sur $A_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$. La cohomologie de Betti, ou analytique, de A (par rapport à σ) est la cohomologie du faisceau constant $\mathbf{Q}$ pour cette topologie. On la note $H_{B, \sigma}^i(A) = H^i(A_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. Le lemme de Dolbeault affirme que le complexe analytique associé au complexe de De Rham $\Omega_{A/K}$ est une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$ sur $A_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ et on peut en déduire le théorème de De Rham qui donne un isomorphisme

$$H_{\text{DR}}^i(A/K) \otimes_{K, \sigma} \mathbf{C} \cong H_{B, \sigma}^i(A) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

Si ι désigne la conjugaison complexe, alors il y a un isomorphisme canonique $H_{B,\sigma}^i(A) \cong H_{B,\iota\sigma}^i(A)$ impliquant que la filtration de Hodge sur $H_{B,\sigma}^i(A) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ est opposée à sa conjuguée complexe. On peut montrer que la suite spectrale de Hodge dégénère en E_1 . Cela donne une décomposition

$$H_{B,\sigma}^i(A) \otimes \mathbf{C} \cong H_{\text{DR}}^i(A/K) \otimes_{\sigma} \mathbf{C} = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q},$$

où $H^{p,q} = H^p(A, \Omega_{A/K}^q) \otimes_{\sigma} \mathbf{C}$. Tout cela fait que, pour tout σ , le groupe de cohomologie de Betti $H_{B,\sigma}^i(A)$ est une structure de Hodge rationnelle de poids i .

Rappelons de la section 1, le $\mathbf{R}$ -groupe algébrique $S = \text{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}} \mathbf{G}_m$. La donnée d'une structure de Hodge sur un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel H est équivalente à la donnée d'un morphisme (de groupes algébriques) $h: S \rightarrow \text{GL}(H \otimes \mathbf{R})$ tel que $S(\mathbf{C})$ opère sur $H^{p,q}$ par le caractère $z^p \bar{z}^q$. Le *groupe de Mumford–Tate* de H est le sous-groupe de $\text{GL}(H)$ engendré par l'image de h , autrement dit, le plus petit sous-groupe algébrique $G \subset \text{GL}(H)$ sur $\mathbf{Q}$ tel que h se factorise par $h: S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$.

Supposons dans la suite que A soit une variété abélienne (polarisée), que K soit algébriquement clos et que $\sigma: K \rightarrow \mathbf{C}$ soit un plongement. On a alors des isomorphismes canoniques $H_{B,\sigma}^i(A) = \wedge^i H_{B,\sigma}^1(A)$ et $H_{\text{DR}}^i(A/K) = \wedge^i H_{\text{DR}}^1(A/K)$, donc les H^1 déterminent toute la cohomologie de A . On définit le groupe de Mumford–Tate $G = \text{MT}(A)$ de A (par rapport à σ) comme celui de la structure de Hodge $H_{B,\sigma}^1(A)$.

Une deuxième interprétation du groupe de Mumford–Tate de A sera utile. On désigne par $\mathbf{Q}(1)$ la structure de Hodge sur $\mathbf{Q}$ de type $(-1, -1)$ et, pour toute $\mathbf{Q}$ -structure de Hodge H , on écrit $H(n) = H \otimes \mathbf{Q}(1)^{\otimes n}$. Dans la suite, on simplifie les notations en écrivant $H = H_{B,\sigma}^1(A)$. Une *classe de Hodge* sur A (relativement à σ) est un élément $\xi \in H^{\otimes 2n}(n)$ de type $(0, 0)$. On dit que ξ est définie sur K si, sous l'isomorphisme $H_{B,\sigma}^1(A) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \cong H_{\text{DR}}^1(A/K) \otimes_K \mathbf{C}$, elle appartient à $H_{\text{DR}}^1(A/K)^{\otimes 2n}(n)$.

Comme A est supposée polarisée, on a un accouplement (de structures de Hodge) $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbf{Q}(-1)$. Cela donne un morphisme $m: G \rightarrow \mathbf{G}_m$ tel que le composé

$$S \xrightarrow{h} G_{\mathbf{R}} \xrightarrow{m} \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}}$$

et l'action de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ par multiplication définissent la structure de Hodge $\mathbf{Q}(1)$. La représentation de G sur $H^{\otimes 2n}(n)$ que l'on en déduit et le morphisme $h: S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ donnent la structure de Hodge sur $H^{\otimes 2n}(n)$. Les classes de Hodge sur A sont invariantes par l'action de S ainsi définie et par conséquent aussi par l'action de G . On peut montrer que G est en effet égal au stabilisateur dans $\text{GL}(H)$ des classes de Hodge sur A , ce qui donne une deuxième description du groupe de Mumford–Tate.

Si ξ est une classe de Hodge sur A relativement à σ et définie sur K , alors la conjecture de Hodge implique que ξ est la classe d'un cycle algébrique sur A défini sur K .

Il s'ensuit que, pour tout autre plongement complexe $\sigma' : K \rightarrow \mathbf{C}$, l'image de ξ par les morphismes

$$\begin{aligned} H_{B,\sigma}^1(A)^{\otimes 2n} \otimes \mathbf{C} &\cong H_{DR}^1(A/K)^{\otimes 2n} \otimes_{\sigma} \mathbf{C} \supset H_{DR}^1(A/K)^{\otimes 2n} \subset \\ &H_{DR}^1(A/K)^{\otimes 2n} \otimes_{\sigma'} \mathbf{C} \cong H_{B,\sigma'}^1(A)^{\otimes 2n} \otimes \mathbf{C} \end{aligned}$$

est encore une classe de Hodge. On dit alors que ξ est une *classe de Hodge absolue*. Notons que l'argument donné ici montre que la conjecture de Hodge implique que toute classe de Hodge est une classe de Hodge absolue même sans supposer que A soit une variété abélienne.

Pour le cas de variété abéliennes, Deligne [10] a montré cette conséquence de la conjecture de Hodge. On donne un aperçu de la démonstration, qui consiste à se ramener aux variétés abéliennes de type CM, pour lesquelles on admettra le résultat. La réduction au cas CM est intéressante, car elle joue un rôle dans [27] et elle a inspiré [28].

On fixe un plongement $\sigma : K \rightarrow \mathbf{C}$ et des classes de Hodge $\xi_i \in H^{\otimes 2n_i}(n_i)$ sur A . Soient $G = \text{MT}(A)$ comme avant et X la $G(\mathbf{R})^+$ -classe de conjugaison du morphisme $h : S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ définissant la structure de Hodge sur $H = H_{B,\sigma}^1(A)$. On peut montrer que (G, X) est une donnée de Shimura et (après avoir choisi une structure de niveau convenable) on y associe une variété de Shimura M , qu'on remplace par la composante irréductible contenant le point correspondant à A . Si la structure de niveau est assez fine, la représentation de G sur H détermine une famille de variétés abéliennes $\pi : \mathcal{X} \rightarrow M$. Par construction, A correspond à un point a de M et les classes de Hodge se prolongent à des sections globales $\tilde{\xi}_i$ des faisceaux $(\mathbf{R}^1\pi_*^{\text{an}}\mathbf{Q})^{\otimes 2n_i}(n_i)$ sur $M(\mathbf{C})$. Comme la valeur en a de chacune des $\tilde{\xi}_i$ est une classe de Hodge, sa valeur en tout autre point de $M(\mathbf{C})$ est également une classe de Hodge. On choisit alors un point spécial $a' \in M(\mathbf{C})$, correspondant à une variété abélienne A' de type CM, et on conclut que, par spécialisation, les $\tilde{\xi}_i$ donnent des classes de Hodge ξ'_i sur A' . En passant à un autre plongement $\sigma' : K \rightarrow \mathbf{C}$ et en utilisant le théorème (admis) pour le cas des variétés de type CM, on conclut que les ξ'_i sont des classes de Hodge sur A' relativement à σ' . Les arguments donnés ci-dessus pour le passage de A à A' permettent de passer de A' à A et impliquent que les ξ_i sont des classes de Hodge sur A relativement à σ' .

Le théorème de Deligne a des conséquences pour les représentations galoisiennes. Soit ℓ un nombre premier. La cohomologie étale est invariante par extension de corps algébriquement clos, d'où des isomorphismes $H_{\text{ét}}^i(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_{\ell}) \cong H_{\text{ét}}^i(A_{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}_{\ell})$. Avec le théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie de Betti, on obtient des isomorphismes canoniques $H_{\text{ét}}^i(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_{\ell}) \cong H_{B,\sigma}^i(A) \otimes \mathbf{Q}_{\ell}$. On déduit une inclusion $G_{\mathbf{Q}_{\ell}} \subset \text{GL}(H_{\text{ét}}^1(A_K, \mathbf{Q}_{\ell}))$, où G désigne toujours le groupe $\text{MT}(A)$.

Dans la suite on suppose que K soit un corps de nombres. Le groupe de Galois G_K opère sur $H_{\text{ét}}^1(A_K, \mathbf{Q}_{\ell})$ et le théorème de Deligne implique que, si toutes les classes

de Hodge (absolues) de $A_{\overline{K}}$ sont définies sur K , alors cette représentation de G_K se factorise par $\rho_\ell: G_K \rightarrow G(\mathbf{Q}_\ell)$. La condition que les classes de Hodge soient définies sur K est toujours vérifiée après avoir remplacé K par une extension finie. La *conjecture de Mumford–Tate*, formulée pour la première fois dans [22], affirme que l’image de ρ_ℓ est Zariski dense dans $G_{\mathbf{Q}_\ell}$. La conjecture originale affirme aussi que l’image de ρ_ℓ est contenue dans $G_{\mathbf{Q}_\ell}$, ce qui a été confirmé par le théorème qu’on vient de voir.

La conjecture de Mumford–Tate est encore ouverte. Elle implique, à peu de choses près, le théorème suivant qui est prouvé dans [27] (mais qui ne se trouvait pas dans ma thèse).

Théorème. *Soit G le groupe de Mumford–Tate d’une variété abélienne A sur $\mathbf{C}$. Alors il existe un corps de nombres K et une variété abélienne A'/K avec groupe de Mumford–Tate G tels que l’image de la représentation ℓ -adique ρ_ℓ associée à A' soit Zariski dense dans $G(\mathbf{Q}_\ell)$.*

En effet, la conjecture affirme que n’importe quelle variété abélienne sur $\overline{\mathbf{Q}}$ avec groupe de Mumford–Tate G convient, mais elle n’implique pas l’existence d’une telle variété abélienne.

Comme dans le travail de Deligne esquissé ci-dessus, on commence la démonstration par la construction d’une variété de Shimura associée à la donnée de Shimura (G, X) déterminée par A . On choisit une composante géométrique M de cette variété, définie sur un corps de nombres. En choisissant une structure de niveau assez fine, on peut supposer que M est la base d’une famille de variétés abéliennes $\pi: \mathcal{X} \rightarrow M$ dont A est une fibre. Le groupe de Mumford–Tate de chaque fibre est contenu dans G .

La description de $M(\mathbf{C})$ comme quotient d’un domaine hermitien symétrique permet de montrer que le groupe fondamental topologique de $M(\mathbf{C})$ est isomorphe à un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbf{Q})$. Cela implique que l’adhérence de l’image de la représentation galoisienne associée au point générique de M contient G^{der} , le groupe dérivé de G . L’étude de la représentation galoisienne associée à un point spécial de M permet de conclure que l’image de la représentation au point générique est Zariski dense dans G . Une variante du théorème d’irréductibilité de Hilbert permet ensuite de montrer l’existence d’un point fermé a' de M tel que l’adhérence de l’image de la représentation ℓ -adique associée à $A' = \mathcal{X}_{a'}$ est encore égale à G . Comme M est définie sur un corps de nombres, le corps résiduel en a' est aussi un corps de nombres. Cela montre que la variété abélienne A' convient.

6 La classe de conjugaison du frobenius

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres $K \subset \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$. On s’intéresse à la façon dont les représentations galoisiennes ρ_ℓ (pour ℓ premier) associées à A varient

avec ℓ . Un résultat classique, dû à Weil, est le suivant (voir par exemple [7] et [9]). Soit v une place finie de K de caractéristique résiduelle p et soit $\text{Fr}_v \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ un élément de Frobenius en v . À noter que Fr_v dépend du choix d'une place $\bar{v}$ de $\overline{\mathbf{Q}}$ au-dessus de v et est alors déterminé seulement à un élément du groupe d'inertie en $\bar{v}$ près. Néanmoins, si A a bonne réduction en v , alors, pour $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\text{Fr}_v)$ ne dépend que de v et est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. En outre, ce polynôme ne dépend pas de $\ell \neq p$. Pour les variétés abéliennes, il est connu que $\rho_\ell(\text{Fr}_v)$ est semi-simple, donc il s'ensuit que la classe de conjugaison (stable) de $\rho_\ell(\text{Fr}_v)$ dans $\text{GL}(H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$ est définie sur $\mathbf{Q}$ et indépendante de ℓ . Via l'isomorphisme canonique (ou en effet n'importe quel autre isomorphisme)

$$H_{\text{B}}^1(A) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell),$$

on déduit qu'il existe une classe de conjugaison C_v dans $\text{GL}(H_{\text{B}}^1(A))_{\overline{\mathbf{Q}}}$, définie sur $\mathbf{Q}$, telle que $\rho_\ell(\text{Fr}_v) \in C_v(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell \neq p$. Précisons que, pour G un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$, on entend par classe de conjugaison définie sur $\mathbf{Q}$ une orbite pour l'action de G sur lui-même par conjugaison telle que le point correspondant de la variété $\text{Spec } \mathbf{Q}[G]^G$ des classes de conjugaison stables de G soit défini sur $\mathbf{Q}$.

On a vu dans la section 5 que, si le corps de nombres K est assez grand, alors les représentations galoisiennes ℓ -adiques se factorisent par des morphismes

$$\rho_\ell: \mathcal{G}_K \rightarrow G(\mathbf{Q}_\ell),$$

où $G = \text{MT}(A)$ est le groupe de Mumford–Tate de A . Dans [41] on trouve la conjecture qu'il existe une classe de conjugaison stable C_v de $G_{\overline{\mathbf{Q}}}$, définie sur $\mathbf{Q}$, telle que $\rho_\ell(\text{Fr}_v) \in C_v(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell \neq p$. Sous la condition additionnelle que la réduction de A modulo v soit ordinaire, cette conjecture est montrée dans [28].

Théorème. *Supposons, avec les notations et définitions ci-dessus, que A a bonne réduction ordinaire en v . Alors il existe $F \in G(\mathbf{Q})$ et des éléments $g_\ell \in G(\mathbf{Q}_\ell)$ tels que $\rho_\ell(\text{Fr}_v) = g_\ell F g_\ell^{-1}$ pour tout nombre premier $\ell \neq p$.*

À part l'hypothèse de réduction ordinaire, l'énoncé de ce théorème est un peu plus fort que la conjecture, car elle implique que la classe de conjugaison C_v possède même un point $\mathbf{Q}$ -rationnel qui est déjà conjugué à $\rho_\ell(\text{Fr}_v)$ par un élément de $G(\mathbf{Q}_\ell)$. Il est facile de voir qu'on ne peut pas espérer ce résultat en général.

Dans [28] on montre que F est également lié à la classe de conjugaison de la transformation de Frobenius en cohomologie cristalline.

Une conséquence du théorème est une réponse affirmative à la conjecture [41, 12.5?] pour un motif M découpé par une classe de Hodge dans le motif d'une variété abélienne à réduction ordinaire. Le polynôme caractéristique du Frobenius sur un tel motif est le même pour toutes les réalisations ℓ -adiques et pour la réalisation p -adique.

La démonstration du théorème est inspiré du travail de Deligne esquissé dans la section 5. On construit encore la variété de Shimura M correspondant à la donnée de Shimura (G, X) associée à A . On suppose que M est munie d'une structure de niveau suffisamment fine pour assurer l'existence d'un schéma abélien $\pi: \mathcal{X} \rightarrow M$ dont A est une fibre. Comme avant, on remplace M par une composante connexe géométrique. Les résultats de [29], énoncés dans la section 3, impliquent qu'il existe un point spécial $a' \in M(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que la variété abélienne A' correspondante soit de type CM et que A' ait la même réduction modulo v que A , disons A_0 . Les faits que A' soit de type CM et que A_0 soit ordinaire impliquent une égalité $\text{End}^0(A_0) = \text{End}^0(A')$ dont on déduit que l'endomorphisme de Frobenius de A_0 se relève à A' . On obtient un endomorphisme F de

$$H_{B,\sigma}^1(A') \cong (\mathbf{R}^1 \pi_*^{\text{an}} \mathbf{Q})_{a'}$$

appartenant à $G(\mathbf{Q})$. On transporte finalement F à $H_{B,\sigma}^1(A) \cong (\mathbf{R}^1 \pi_*^{\text{an}} \mathbf{Q})_a$ en identifiant les fibres de $\mathbf{R}^1 \pi_*^{\text{an}} \mathbf{Q}$ en a et en a' via un chemin γ de $M(\mathbf{C})$ reliant ces deux points. Cela montre l'existence de F . La construction des g_ℓ repose sur le fait que l'identification $H_{B,\sigma}^1(A) \cong H_{B,\sigma}^1(A')$ respecte les classes de Hodge.

7 Des variétés de Shimura construites par Mumford

On a déjà évoqué, dans la section 3 en particulier, l'existence de variétés de Shimura de type Hodge avec une interprétation modulaire qui ne soit pas de type PEL. On donne ici un tel exemple, dû à Mumford [23]. La construction joue un rôle dans mes publications [32], [30] et [31].

Fixons un corps de nombres F totalement réel de degré 3 et une algèbre de quaternions D de centre F tel que $\text{Cor}_{F/\mathbf{Q}}(D) \cong M_8(\mathbf{Q})$ et $D \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{H} \times M_2(\mathbf{R})$. Ici, $\mathbf{H}$ désigne l'algèbre des quaternions réels. Dans la suite, on considère le groupe des unités D^* de D comme groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$. La « norme » donne un morphisme $N: D^* \rightarrow \text{Cor}_{F/\mathbf{Q}}(D) \cong \text{GL}_8(\mathbf{Q})$. Le $\mathbf{Q}$ -groupe algébrique G est défini comme l'image de ce morphisme. Par construction, ce groupe possède une représentation fidèle V de dimension 8. L'algèbre de Lie de $G_{\overline{\mathbf{Q}}}$ est isomorphe à $\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{sl}(2)^3$ avec centre $\mathfrak{c}$ de dimension 1. Cette algèbre de Lie opère sur V par le produit tensoriel des représentations naturelles des facteurs. Cela implique que la représentation V de G est absolument irréductible.

Soit S comme dans les sections 1 et 5, posons

$$\begin{aligned} \tilde{h}: S &\longrightarrow \mathbf{H}^* \times \mathbf{H}^* \times \text{GL}_{2,\mathbf{R}} \cong D_{\mathbf{R}}^* \\ a + bi &\mapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et soient $h = N_{\mathbf{R}} \circ \tilde{h}$ et X la $G(\mathbf{R})$ -classe de conjugaison de h . Il est facile de voir que (G, X) est une donnée de Shimura, d'où, pour tout sous-groupe compact ouvert $C \subset G(\mathbf{A}_f)$, le modèle canonique ${}_CM$ de la variété de Shimura associée. Un simple calcul montre que $\dim {}_CM = 1$. Par la représentation V , tout point $x \in {}_CM(\mathbf{C})$ donne une variété abélienne A_x de dimension 4 avec groupe de Mumford–Tate $\mathrm{MT}(A_x)$ contenu dans G . Comme $\dim {}_CM = 1$, le groupe $\mathrm{MT}(A_x)$ est égal à G si et seulement si x n'est pas un point spécial de ${}_CM$. Pour C suffisamment petit, il existe un schéma abélien $X/{}_CM$ dont la fibre en tout point $x \in {}_CM(\mathbf{C})$ est A_x . La représentation V étant absolument simple, on a $\mathrm{End}(A_x) = \mathbf{Z}$ dès que $\mathrm{MT}(A_x) = G$, ce qui montre que cette famille pas de type PEL.

Les fibres de ces familles se reconnaissent à partir de leur groupe de Mumford–Tate, de la manière suivante. Pour k un corps de caractéristique 0, G un k -groupe algébrique linéaire et V une représentation fidèle de G , on dira que (G, V) est à la Mumford si le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathrm{Lie}(G)$ est de dimension 1 et $\mathrm{Lie}(G)_{\bar{k}} \cong \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{sl}(2)^3$ opérant sur $V_{\bar{k}}$ par le produit tensoriel des représentations naturelles des facteurs. Si $A/\mathbf{C}$ est une variété abélienne telle que $(\mathrm{MT}(A), H_{\mathrm{B}}^1(A))$ est une représentation à la Mumford, alors on montre dans [32] que A est une fibre dans une famille du type construit ci-dessus.

Il est nécessaire de rappeler la notion de polygone de Newton. Soit A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K et soit ρ_{ℓ} , pour ℓ un nombre premier, la représentation étale ℓ -adique de $\mathcal{G}_K$ sur $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_{\ell})$. Fixons une valuation v de K où A a bonne réduction et un élément de Frobenius $\mathrm{Fr}_v \in \mathcal{G}_K$ en v . Soit p la caractéristique résiduelle de v . Comme on l'a vu dans la section 6, si $\ell \neq p$, alors les valeurs propres de $\rho_{\ell}(\mathrm{Fr}_v)$ sont des entiers algébriques qui ne dépendent ni du choix de Fr_v , ni de ℓ . Un théorème de Weil, voir [7] ou [48], implique que, pour λ une valeur propre de $\rho_{\ell}(\mathrm{Fr}_v)$, toutes les valeurs absolues archimédiennes de λ sont égales à $\sqrt{q}$, où q est le cardinal du corps résiduel de K en v . On fixe une valuation p -adique w de $\bar{\mathbf{Q}}$ et on considère la suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2g})$ des quotients $w(\lambda)/w(q)$ pour λ parcourant les valeurs propres de $\rho_{\ell}(\mathrm{Fr}_v)$, dans l'ordre croissant. Le *polygone de Newton* de A en v est la courbe linéaire par morceaux de $\mathbf{R}^2$ reliant les points

$$(0, 0), (1, \alpha_1), (2, \alpha_1 + \alpha_2), \dots, (2g, \alpha_1 + \dots + \alpha_{2g})$$

dans l'ordre. Les α_i sont les *pentés* du polygone de Newton.

Dans [32] j'étudie les polygones de Newton possibles pour les fibres des familles de Mumford, autrement dit la stratification des variétés de Shimura de Mumford définie par les polygones de Newton. Pour les variétés des modules de variétés abéliennes, cette stratification, bien plus compliquée, à été étudiée entre autres par Oort [34]. Pour formuler le résultat de [32], il faut remarquer que, pour le modèle canonique ${}_CM$ d'une variété de Shimura du type en question, le corps dual est égal au corps totalement réel

F servant dans la construction de ${}_CM$. Le modèle canonique est donc un F -schéma. Si, pour K un corps de nombres, A/K correspond à un point de ${}_CM(K)$, alors cette donnée détermine un plongement $F \subset K$.

Proposition. *Soient $X/{}_CM$ une famille de variétés abéliennes comme ci-dessus, K un corps de nombres et A la fibre de cette famille de en un point non-spécial de ${}_CM(K)$. Soit v une valuation p -adique de K . La liste des polygones de Newton possibles de A en v dépend uniquement du degré local de F en v . Dans chaque cas, il y a deux possibilités.*

- Si $[F_v : \mathbf{Q}_p] = 1$, alors le polygone de Newton est $4 \times 0, 4 \times 1$ ou $8 \times 1/2$.
- Si $[F_v : \mathbf{Q}_p] = 2$, alors le polygone de Newton est $2 \times 0, 4 \times 1/2, 2 \times 1$ ou $8 \times 1/2$.
- Si $[F_v : \mathbf{Q}_p] = 3$, alors le polygone de Newton est $0, 3 \times 1/3, 3 \times 2/3, 1$ ou $8 \times 1/2$.

En combinant les résultats de [32] avec ceux de [30], on obtient également une liste des possibilités pour la décomposition en facteurs simples de la réduction de A modulo v .

Pour établir la liste des possibilités pour les polygones de Newton, on n'utilise que les propriétés des représentations galoisiennes ℓ -adiques associées à A . Les résultats nécessaires se trouvent dans [30] et sont traités dans la section 8. Pour montrer que les listes données sont exhaustives, on utilise la classification des points spéciaux de ${}_CM$ donnée ci-après et la proposition suivante, dont la démonstration repose sur un argument qui ressemble à la démonstration du théorème de la section 5.

Proposition. *Soient G et $X/{}_CM$ comme avant, K un corps de nombres et $a \in {}_CM(K)$ un point spécial correspondant à une variété abélienne $A = X_a$. Pour toute valuation v de K où A a bonne réduction A_0/k_v , il existe une extension finie K' de K , une valuation v' de K' prolongeant v et un point $a' \in {}_CM(K')$ tels que la variété abélienne A' correspondant à a' a groupe de Mumford–Tate G et que la réduction A'_0 de A' en v' vérifie $A_0 \cong A'_0$.*

On termine cette section par une esquisse de la classification, obtenue dans [32], des points spéciaux de ${}_CM$. On en trouve deux classes. Les points spéciaux de la première classe correspondent à des variétés abéliennes A qui se décomposent comme $A \sim A^{(1)} \times A^{(3)}$ où $A^{(1)}$ est une courbe elliptique de type CM et $A^{(3)}$ une variété abélienne simple de dimension 3 de type CM. Les corps CM de $A^{(1)}$ et de $A^{(3)}$ sont de la forme E et $E \otimes_{\mathbf{Q}} F$ respectivement, où E est un corps quadratique (nécessairement) imaginaire tel que $D \otimes_{\mathbf{Q}} E \cong M_2(F \otimes_{\mathbf{Q}} E)$. Rappelons que D est l'algèbre de quaternions utilisée dans la construction de Mumford et que F est le centre de D .

La deuxième classe consiste exactement des variétés de type CM étudiés par Pohlman dans [36]. Il s'agit de variétés abéliennes simples avec corps de multiplication complexes E de degré 8 telles que le corps dual L du type CM vérifie $[L : \mathbf{Q}] = 6$, $F \subset L$ et $D \otimes_F L \cong M_2(L)$.

8 Représentations galoisiennes à la Mumford

Comme dans ce qui précède, A est une variété abélienne sur un corps de nombres K et pour tout nombre premier ℓ ,

$$\rho_\ell: \mathcal{G}_K \rightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell))$$

est la représentation galoisienne associée. On écrit $V_\ell = \mathrm{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$ et note G_ℓ l'adhérence de Zariski de $\rho_\ell(\mathcal{G}_K)$ dans $\mathrm{GL}(V_\ell)$. On dit que ρ_ℓ est *à la Mumford* si le couple (G_ℓ, V_ℓ) l'est, au sens de la section 7.

Cette section est consacrée aux propriétés, établies dans [30], des variétés abéliennes A avec une représentation galoisienne ℓ -adique à la Mumford. Comme l'image de la représentation galoisienne de A est contenue dans le groupe de Mumford–Tate, les résultats peuvent être appliqués aux variétés abéliennes considérées dans la section précédente. Une première propriété remarquable des variétés abéliennes avec une représentation galoisienne à la Mumford est donnée par le théorème suivant.

Théorème. *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K et supposons qu'il existe un nombre premier ℓ tel que la représentation ℓ -adique associée à A est à la Mumford. Alors A a potentiellement bonne réduction en toute place finie de K .*

Soit v une valuation de K . Des travaux de Serre [38] et de Pink [35] sur la conjecture de Mumford–Tate impliquent que les groupes G_ℓ , pour ℓ variable dans un ensemble de nombres premiers assez grand, proviennent par extension de scalaires d'un même groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$. Cela permet de se ramener au cas où G_ℓ^{der} est presque $\mathbf{Q}_\ell$ -simple pour un nombre premier ℓ avec $v(\ell) = 0$. Par le critère de Néron–Ogg–Shafarevich, qu'on trouve par exemple dans [43], il suffit de montrer qu'il existe une extension finie K' de K et une place v' de K' au-dessus de v tels que le groupe d'inertie en v' opère trivialement sur V_ℓ .

La condition sur G_ℓ implique que les éléments unipotents non-triviaux de $G_\ell(\mathbf{Q}_\ell)$ sont d'échelon > 2 , tandis qu'un théorème Grothendieck [16, Exposé I] implique que, pour une extension finie $K' \supset K$ convenable, $\rho_\ell(\alpha)$ est unipotent d'échelon ≤ 2 pour tout α dans le groupe d'inertie $I_{K', v'}$. Ce groupe d'inertie agit donc trivialement.

Signalons le corollaire suivant, qu'on trouve également dans [30].

Corollaire. *Soit A/K une variété abélienne de dimension 4 sur un corps de nombres n ayant pas potentiellement bonne réduction partout. Alors la conjecture de Mumford–Tate est vraie pour A .*

Les résultats de bonne réduction potentielle peuvent être généralisés à d'autres types de représentations galoisiennes, notamment pour des variétés abéliennes liées à certaines variétés de Shimura construites par Addington [1]. En plus, il est possible de déduire des résultats de bonne réduction de A en une place p -adique des propriétés de

la représentation p -adique associée à A . Ce travail fait l'objet de la thèse que F. Paugam prépare sous ma direction.

Passons à l'étude, déjà utilisée dans la section 7, des polygones de Newton d'une variété abélienne avec une représentation galoisienne à la Mumford. Pour A une variété abélienne sur un corps de nombres K et v une valuation p -adique de K , le polygone de Newton de A en v est égal au polygone de Newton de la représentation p -adique $(\rho_p)|_{I_{K,\bar{v}}}$ du groupe d'inertie, défini ci-dessous. Pour établir les possibilités pour le polygone de Newton de A en v , il suffit donc d'étudier les propriétés de certaines représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local p -adique avec corps résiduel algébriquement clos. Après l'introduction des notions nécessaires, le reste de la section est dédié à cette étude, faite dans [30].

En changeant les notations jusqu'à la fin de la section, K désigne une extension finie de $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, où $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ est l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. Un *module filtré* sur K est un $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme σ -linéaire $\text{Fr}: D \rightarrow D$ et d'une filtration (Fil^i) de $D \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}} K$. Cette filtration est supposée décroissante, exhaustive, séparée et de longueur finie. Ici σ est l'automorphisme de Frobenius de $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$. La théorie de Fontaine, exposée par exemple dans [13] et [14], permet d'associer un module filtré à toute représentation p -adique de $\mathcal{G}_K$. Pour le faire, Fontaine construit l'anneau des périodes p -adiques B_{cris} , une $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ -algèbre munie à la fois de la structure module filtré et d'une action de $\mathcal{G}_K$. On définit le module filtré associé à une représentation $\mathbf{Q}_p$ -linéaire V par $D = D(V) = (V \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{\text{cris}})^{\mathcal{G}_K}$. On dit que la représentation est *cristalline* si $\dim_{\mathbf{Q}_p} V = \dim_{\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}} D(V)$. Cette propriété peut être considérée comme l'analogue de la notion de représentation ℓ -adique non-ramifiée de $\mathcal{G}_K$ pour $\ell \neq p$. La notion est voisine de celle, plus faible, de représentation de Hodge–Tate qui a été étudiée depuis Tate [47], voir aussi [39]. Si A/K est une variété abélienne, alors la représentation de $\mathcal{G}_K$ sur $V_p = H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ est cristalline si et seulement si A a bonne réduction.

Soit D un $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme σ -linéaire Fr . Un théorème de classification dû à Dieudonné (voir [17]) implique qu'il existe une suite de nombres rationnels $r_1/s_1 \leq \dots \leq r_k/s_k$ (avec r_i et s_i premiers entre eux) telle que

$$D \cong \bigoplus_{i=1}^k D(r_i/s_i),$$

où $D(r/s) = \mathbf{Q}_p[T]/(T^s - p^r) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ muni de Fr donné par

$$\text{Fr}(x \otimes \lambda) = (Tx) \otimes (\sigma(\lambda)).$$

En analogie avec la définition dans la section 7, la suite

$$(r_1/s_1 \text{ (} s_1 \text{ fois)}, r_2/s_2 \text{ (} s_2 \text{ fois)}, \dots, r_k/s_k \text{ (} s_k \text{ fois)}),$$

est la suite des pentes du polygone de Newton de D (et de V). Si la représentation V vient d'une variété abélienne A , on retrouve le polygone de Newton de A défini dans la section 7.

Proposition. Soient G_p un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}_p$ et V_p une représentation de G_p telle que (G_p, V_p) soit à la Mumford. Soient $K \supset \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ une extension finie comme avant et $\rho_p: G_K \rightarrow G_p(\mathbf{Q}_p)$ une représentation cristalline polarisable avec pentes de Newton dans l'intervalle $[0, 1]$. Alors le polygone de Newton de ρ_p est parmi $4 \times 0, 4 \times 1$; $2 \times 0, 4 \times 1/2, 2 \times 1$; $0, 3 \times 1/3, 3 \times 2/3, 1$; et $8 \times 1/2$.

En faisant une distinction selon les décompositions de G_p en facteurs presque $\mathbf{Q}_p$ -simples, on peut arriver à un résultat plus précis donnant deux possibilités pour le polygone de Newton dans chaque cas.

La démonstration de la proposition repose sur le fait, montré dans [35], qu'il existe un groupe algébrique H sur $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, forme intérieure de G_p , agissant sur D et un cocaractère μ de H telle que la graduation de D donnée par μ soit la même que celle par les $D(r_i/s_i)$.

9 Une conjecture de Fontaine et Mazur

Soient K à nouveau un corps de nombres, p un nombre premier, V_p un $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie et $\rho_p: G_K \rightarrow \text{GL}(V_p)$ une représentation continue. On dira que ρ_p est *géométrique* si

- ρ_p est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini S de places de K et
- pour toute valuation $\bar{v}$ de $\bar{K}$, la restriction de ρ_p au groupe d'inertie $I_{K, \bar{v}}$ est potentiellement semi-stable.

La condition d'être non-ramifiée en v veut dire que l'inertie en v opère trivialement. La condition que ρ_p soit *potentiellement semi-stable* est équivalente à ce que la restriction de ρ_p à un sous-groupe d'indice fini de $I_{K, \bar{v}}$ soit semi-stable. La définition de représentation *semi-stable* est différente selon les cas où la caractéristique résiduelle en v est égale à p ou pas. Dans le premier cas, il s'agit de la notion définie par Fontaine dans [14]. La définition est analogue à celle d'une représentation cristalline rappelée dans la section 8, avec B_{cris} remplacée par l'algèbre B_{st} . Pour la suite il suffira de savoir que toute représentation cristalline est semi-stable. Dans le deuxième cas, où la caractéristique résiduelle en v est différente de p , être semi-stable veut dire que $I_{K, \bar{v}}$ opère de façon unipotente. Le théorème de Grothendieck sur les représentations p -adiques de corps locaux ℓ -adiques pour $\ell \neq p$ (voir [16]) montre que, dans ce cas, toute représentation de $I_{K, \bar{v}}$ est potentiellement semi-stable.

Si ρ_p est irréductible, on dit qu'elle *vient de la géométrie algébrique* s'il existe une variété algébrique A/K telle que ρ_p soit un sous-quotient de la représentation de G_K

sur un groupe de cohomologie étale tordu $H_{\text{ét}}^i(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)(n)$. Comme ρ_p est supposée irréductible, on obtient une définition équivalente si l'on impose à A d'être propre et lisse.

Dans [15], Fontaine et Mazur ont formulé la conjecture suivante.

Conjecture. *Une représentation p -adique irréductible ρ_p de $\mathcal{G}_K$ est géométrique si et seulement si elle vient de la géométrie algébrique.*

La partie « si » de la conjecture suit de travail de Tsuji [50] et De Jong [4]. On sait beaucoup moins pour l'implication réciproque. Concernant celle-ci, le cas où ρ_p est commutatif est traité dans [15]. Taylor [49] a montré la conjecture dans le cas où $\dim V_p = 2$ et K est totalement réel.

Dans [31], les fibres des familles de Mumford sont utilisées pour la construction de représentations géométriques. Dans la première partie de la construction, des hypothèses plus faibles sont suffisantes. On suppose que G_p est un $\mathbf{Q}_p$ -groupe algébrique et V_p une représentation à la Mumford de G_p . Dans toute la suite, on suppose que $\text{Lie}(G_p)$ est scindé. Il existe alors une isogénie centrale

$$\tilde{G}_p \cong \mathbf{G}_{m, \mathbf{Q}_p} \times \text{SL}_{2, \mathbf{Q}_p}^3 \rightarrow G_p$$

et V_p s'identifie (en tant que représentation de $\tilde{G}_p$) au produit tensoriel de représentations naturelles des facteurs.

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K telle que, pour une identification $V_p = H_{\text{ét}}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ convenable, la représentation galoisienne associée à A se factorise par $\rho_p: \mathcal{G}_K \rightarrow G_p(\mathbf{Q}_p)$. Pour l'instant, il n'est pas nécessaire que l'image soit Zariski dense, ni que $G_p = \text{MT}(A)_{\mathbf{Q}_p}$. D'après le théorème de bonne réduction potentielle traité dans la section 8, on peut remplacer K par une extension finie telle que ρ_p soit non-ramifiée en toute place finie de K de caractéristique résiduelle différente de p et cristalline en toute place de caractéristique résiduelle égale à p .

Pour K assez grand, ρ_p se relève à une représentation $\tilde{\rho}_p: \mathcal{G}_K \rightarrow \tilde{G}_p(\mathbf{Q}_p)$. En composant avec les projections sur les facteurs de $\tilde{G}_p$, cela donne des représentations

$$\rho^1, \rho^2, \rho^3: \mathcal{G}_K \rightarrow \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$$

et un caractère $\rho^0: \mathcal{G}_K \rightarrow \mathbf{G}_m(\mathbf{Q}_p)$. Comme ρ est non-ramifiée en dehors des valuations p -adiques de K , il est clair que, pour K assez grand, les ρ^i (pour $i = 0, \dots, 3$) sont aussi non-ramifiées en dehors des valuations p -adiques. Pour les places p -adiques on a le théorème suivant.

Théorème. *Si K est assez grand, alors $(\rho^0)^{-2}$ est le caractère cyclotomique de $\mathcal{G}_K$. Pour toute valuation p -adique v de K , il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\rho^0 \rho^i$ soit cristalline en v et que ρ^j soit triviale sur $I_{K, \bar{v}}$ pour $j \neq i$.*

En particulier, ni les ρ^i ni les $\rho^0\rho^i$ sont géométriques. On dira que ρ^i est de *premier espèce* en v si la restriction de $\rho^0\rho^i$ à $I_{K,\bar{v}}$ est cristalline, et de *second espèce* si la restriction de ρ^i à $I_{K,\bar{v}}$ est triviale.

Pour donner une idée de la démonstration du théorème, on fixe une valuation p -adique v de K et on étudie les restrictions des représentations en question au groupe d'inertie $I = I_{K,\bar{v}}$ correspondant. Une représentation cristalline V_p (ou même une représentation semi-stable) est de Hodge–Tate et cela implique que la filtration de $D(V_p)$ est scindée sur le corps $\mathbf{C}_p$, le complété de $\bar{\mathbf{Q}}_p$. On en déduit une graduation de $V_p \otimes \mathbf{C}_p$, donnée par un cocaractère $\mu_{\text{HT}} : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}_p} \rightarrow \text{GL}(V_p \otimes \mathbf{C}_p)$. Un théorème de Sen, voir par exemple [39], implique que l'adhérence de $\rho_p(I)$ dans $\text{GL}(V_p)$ est égal au plus petit sous-groupe de $\text{GL}(V_p)$ (défini sur $\mathbf{Q}_p$) contenant l'image de μ_{HT} . Le fait que la graduation de Hodge–Tate est en deux crans implique que μ_{HT} se projette trivialement sur un facteur de G^{ad} et un seul. On déduit que la même chose est vraie pour la projection de $\rho_p(I)$ sur $G^{\text{ad}}(\mathbf{Q}_p)$. Cela prouve la trivialité de deux d'entre les ρ_i (pour $i = 1, 2, 3$). Le fait que $\rho_p = \rho^0(\rho^1 \otimes \rho^2 \otimes \rho^3)$ est cristalline montre que le produit de ρ_0 et la troisième ρ_i est également cristalline.

Pour la deuxième partie de la construction des représentations géométriques, on a besoin de l'hypothèse beaucoup plus lourde sur A qu'elle est une fibre d'une famille de Mumford. Cette condition est équivalente à ce qu'il existe un groupe $G \subset \text{GL}(H_{\mathbf{B}}^1(A))$ tel que $\text{MT}(A) \subset G$ et que la représentation de G sur $H_{\mathbf{B}}^1(A)$ soit à la Mumford. Comme $\text{MT}(A)$ est connexe, on peut supposer dans la suite que G l'est également. On obtient une donnée de Shimura (G, X) et il était signalé dans la section 7 que le corps dual est un corps de nombres cubique F . On sait que G admet une isogénie $\tilde{G} \rightarrow G$ où $\tilde{G} \cong \mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}} \times \tilde{G}^{\text{der}}$ et $\tilde{G}^{\text{der}}$ est la restriction de scalaires de F à $\mathbf{Q}$ d'une F -forme de SL_2 . Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que la représentation de $\mathcal{G}_K$ sur $H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ se factorise par $\rho_p : \mathcal{G}_K \rightarrow G(\mathbf{Q}_p)$. On suppose enfin que G est scindé sur $\mathbf{Q}_p$, ce qui est le cas pour un nombre infini de p .

Les conditions imposées dans la première partie de la construction se trouvent ainsi vérifiées avec $G_p = G_{\mathbf{Q}_p}$. La condition que $G_{\mathbf{Q}_p}$ est scindé implique que p est scindé dans F et les facteurs $\text{SL}_{2,\mathbf{Q}_p}$ de $\tilde{G}^{\text{der}}$ correspondent alors aux valuations p -adiques v_1 , v_2 et v_3 de F . On fait correspondre la représentation ρ^i à la valuation v_i .

Soit $\mu_h : \mathbf{G}_m \rightarrow G_{\mathbf{C}}$ le cocaractère associé au morphisme $h : S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ définissant la structure de Hodge sur $H_{\mathbf{B}}^1(A)$, comme dans les sections 1 et 5. Un théorème de Wintenberger [51] donne la relation entre μ_h et le cocaractère μ_{HT} associé à la décomposition de Hodge–Tate. On peut en déduire la

Proposition. *Il existe un plongement $F \rightarrow K$ tel que, pour toute valuation p -adique v de K , la représentation ρ^i est de première espèce en v si et seulement si $v|_F = v_i$.*

Choisissons une deuxième variété abélienne A'/K , vérifiant les mêmes conditions que A , pour un groupe $G' \subset \mathrm{GL}(H_B^1(A))$ de type Mumford, connexe et scindé sur $\mathbf{Q}_p$ et tel que le corps dual de la donnée de Shimura (G', X') associée soit encore égal à F . Pour $i = 1, 2, 3$ on construit des représentations ρ'^i comme pour A et, quitte à les renuméroter, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire. *La représentation $\tau = \rho^1 \otimes \rho'^1$ est géométrique.*

En utilisant les idées derrière le théorème de la section 5 et la théorie des représentations de SL_2 , on montre la proposition suivante.

Proposition. *On peut choisir A et A' de sorte que $\tau = \rho^1 \otimes \rho'^1$ soit irréductible et que τ ne soit isomorphe à aucun sous-quotient d'aucune représentation de la forme*

$$H^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)^{\otimes i} \otimes H^1(A'_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)^{\otimes j}(k).$$

Dans tous les cas où τ est irréductible, la conjecture de Fontaine et Mazur affirme qu'elle vient de la géométrie algébrique. Dans [31] on confirme cette prédiction.

Théorème. *Si la représentation τ est irréductible, alors elle vient, à extension finie de K près, de la géométrie algébrique.*

Je montre dans [31] que τ vient même de la cohomologie de variétés abéliennes, construites explicitement. Pour la construction de ces variétés, on se ramène d'abord à un cas plus spécial. Soit A'' une fibre spéciale d'une famille de Mumford, associée à une donnée de Shimura (G'', X'') avec G'' scindé sur $\mathbf{Q}_p$ et dont le corps dual est encore égal à F . La construction ci-dessus peut être appliquée à la représentation p -adique de A'' et on obtient des représentations ρ''^i pour $i = 1, 2, 3$. On peut choisir A'' de sorte que les ρ''^i se décomposent en somme directe de caractères, en particulier $\rho''^1 = \psi \oplus \psi^{-1}$. On montre comme avant que, après renuméroter les ρ''^i , le produit $\rho^1 \psi$ est géométrique. Comme $\tau = (\rho^1 \psi) \otimes (\rho'^1 \psi^{-1})$, il suffit de montrer que $\rho^1 \psi$ vient de la géométrie, après extension finie de K . Notons que ce fait ne suit pas du résultat de Taylor [49], parce que K contient le corps dual du type CM de A'' , ce qui implique que K n'est dans aucun cas totalement réel.

On va construire des variétés abéliennes B et C sur une extension finie de K telles que $\rho^1 \psi$ soit un sous-quotient d'un groupe de cohomologie étale de $B \times C$. La construction s'inspire des remarques de Deligne dans [6] sur les « modèles étranges » de Shimura.

De la discussion dans la section 7, on déduit qu'il existe une algèbre de quaternions D sur F et un morphisme de $\mathbf{Q}$ -groupes algébriques $D^* \rightarrow G$ tels que le morphisme $h: S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ déterminant la structure de Hodge de A se relève à $\tilde{h}: S \rightarrow (D^*)_{\mathbf{R}}$. Via la représentation de D^* sur D par multiplication à gauche, cela donne une structure de Hodge sur D sur laquelle F opère par endomorphismes.

La classification des points spéciaux des variétés de Shimura de Mumford, obtenue dans [32], montre qu'il existe une extension quadratique imaginaire L de F telle que le groupe de Mumford–Tate de A'' est un quotient de L^* (vu comme $\mathbf{Q}$ -groupe algébrique). On définit un morphisme $S \rightarrow (L^*)_{\mathbf{R}} \cong S^3$ par $z \mapsto (z, z, 1)$, où la composante triviale est dans le facteur correspondant à la place réelle de F où D est scindée. Via la représentation de L^* sur L , on obtient une structure de Hodge sur L , sur laquelle F opère également. Le produit tensoriel $D \otimes_F L$ est isomorphe à la structure de Hodge sur $H_B^1(B_C)$, pour B_C une variété abélienne sur $\mathbf{C}$. La théorie des modèles canoniques des variétés de Shimura permet de montrer que B_C se descend à une variété abélienne sur un corps de nombres.

Ensuite, on construit une variété abélienne C de type CM avec algèbre d'endomorphismes L et on montre que, à extension finie de K près, $\rho^1\psi$ est un sous-quotient de

$$H_{\text{ét}}^1(B_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p) \otimes H_{\text{ét}}^1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p).$$

Pour montrer ce dernier fait, on prouve plutôt l'existence d'un isomorphisme entre les motifs correspondants, dans la théorie des motifs pour les classes de Hodge absolues élaborée dans [12]. Pour établir un tel morphisme de motifs il suffit, d'après le théorème de [10] qui affirme que les classes de Hodge sur les variétés abéliennes sont des classes de Hodge absolues, de montrer l'existence d'un isomorphisme entre les structures de Hodge associées à ces motifs. Ceci termine l'esquisse de la démonstration du théorème.

Après le corollaire dans la section 8, cette construction donne une deuxième idée pour attaquer la conjecture de Mumford–Tate. Supposons en effet que la variété abélienne A vérifie uniquement les conditions de la première partie de la construction de τ , c'est à dire que la représentation galoisienne associée est à la Mumford, mais le groupe de Mumford–Tate est peut-être plus grand. Si on peut montrer la première proposition de cette section dans ce cas, alors la représentation $\rho^1\psi$, construite comme ci-dessus, est encore géométrique. La conjecture de Fontaine–Mazur affirme que cette représentation vient de la géométrie algébrique. Si elle vient de la cohomologie de variétés abéliennes B et C comme ci-dessus, alors le fait que la conjecture de Mumford–Tate est vraie pour B et C implique la conjecture pour A .

10 Autres remarques sur la conjecture de Fontaine–Mazur

Soit ρ_p une représentation p -adique du groupe de Galois absolu $\mathcal{G}_K$ d'un corps de nombres K qui provient de la géométrie algébrique. Comme le remarquent Fontaine et Mazur, les conjectures standards de la théorie des motifs impliquent que ρ_p possède

des propriétés remarquables. En premier lieu, ρ_p est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini S de places de K . On a vu que cela implique que, pour toute valuation $v \notin S$, l'image $\rho_p(\text{Fr}_v)$ d'un élément de Frobenius en v est définie à conjugaison près. La théorie des motifs implique que le polynôme caractéristique de $\rho_p(\text{Fr}_v)$, a priori dans $\mathbf{Z}_p[T]$, est en effet dans $E[T]$, pour E un corps de nombres.

Pour formuler la deuxième propriété motivique d'une représentation provenant de la géométrie, on rappelle la notion d'un *système compatible* de représentations galoisiennes à valeurs dans un corps de nombres E . Par cela on entend la donnée, pour toute place finie λ de E , d'une représentation E_λ -linéaire ρ_λ de G_K , avec les propriétés suivantes. D'abord, il existe un ensemble fini S de places de K tel que, pour toute λ , la représentation ρ_λ soit non-ramifiée en dehors de $S \cup S_\ell$, où ℓ est la caractéristique résiduelle de λ et S_ℓ l'ensemble des valuations de K de caractéristique résiduelle égale à ℓ . Pour toute valuation $v \notin S$ et toute λ dont la caractéristique résiduelle est différente de celle de v , le polynôme caractéristique de $\rho_p(\text{Fr}_v)$ est alors bien défini et la condition que (ρ_λ) soit un système compatible est que ce polynôme caractéristique est à coefficients dans E et indépendant de λ , pour $v \notin S$ fixée et λ comme ci-dessus variable.

D'après les conjectures standards, une représentation galoisienne $\mathbf{Q}_p$ -linéaire ρ_p de G_K provenant de la géométrie fait partie d'un système compatible de représentations. Ceci veut dire qu'il existe un corps de nombres E et un système compatible (ρ_λ) à coefficients dans E tels que, pour λ appropriée de caractéristique résiduelle égale à p , la représentation ρ_λ est l'extension de scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à E_λ de la représentation ρ_p donnée.

La conjecture de Fontaine et Mazur implique que les propriétés détaillées ci-dessus sont vérifiées pour toute représentation géométrique. Dans ce contexte, je m'intéresse à une généralisation de la construction de la section précédente. Soient G le groupe de Mumford–Tate d'une variété abélienne A sur un corps de nombres K et, pour tout ℓ premier, $\rho_\ell: G_K \rightarrow G(\mathbf{Q}_\ell)$ la représentation ℓ -adique associée à A . On note $h: S \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ le morphisme donnant la structure de Hodge de A et μ_h le cocaractère de G associé, comme dans la section 1. Soient $G \rightarrow G'$ un morphisme central de groupes algébriques et μ'_h et ρ'_ℓ les composés de μ_h et des ρ_ℓ avec $G \rightarrow G'$ respectivement.

Si $\tilde{G} \rightarrow G'$ est une isogénie centrale telle que μ'_h se relève à $\tilde{G}_{\mathbf{C}}$, alors un théorème de Wintenberger [52] implique que, après avoir remplacé K par une extension finie, le système des ρ'_ℓ se relève à un système $\tilde{\rho}_\ell: G_K \rightarrow \tilde{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ de représentations géométriques. Un travail en cours traite la question si $(\tilde{\rho}_\ell)$ est un système compatible de représentations galoisiennes. Un outil important dans ce travail, et la raison principale de se borner aux représentations associées aux variétés abéliennes, est le théorème de [28] sur la classe de conjugaison du Frobenius.

Références

- [1] S. L. Addington. Equivariant holomorphic maps of symmetric domains. *Duke Math. J.*, 55, p. 65–88, 1987.
- [2] W. L. Baily, Jr. et A. Borel. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Ann. of Math.*, 84, p. 442–528, 1966.
- [3] R. Coleman. Torsion points on curves. Dans *Galois representations and arithmetic algebraic geometry*, édité par Y. Ihara, tome 12 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 235–247, 1987.
- [4] A. J. de Jong. Smoothness, semi-stability and alterations. *Publ. Math. de l’I. H. E. S.*, 83, p. 51–93, 1996.
- [5] J. de Jong et R. Noot. Jacobians with complex multiplication. Dans *Arithmetic algebraic geometry*, édité par G. van der Geer, F. Oort, et J. H. M. Steenbrink, tome 89 de *Progr. Math.*, pages 177–192. Birkhäuser, 1991.
- [6] P. Deligne. Travaux de Shimura. Dans *Séminaire Bourbaki*, tome 244 de *Lecture Notes in Math.*, pages 123–165. Springer-Verlag, 1972. Exposé 389, février 1971.
- [7] P. Deligne. La conjecture de Weil. I. *Publ. Math. de l’I. H. E. S.*, 43, p. 273–307, 1974.
- [8] P. Deligne. Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. Dans *Automorphic forms, representations, and L-functions*, édité par A. Borel et W. Casselman, tome XXXIII, Part 2 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 247–289. Amer. Math. Soc., 1979.
- [9] P. Deligne. La conjecture de Weil. II. *Publ. Math. de l’I. H. E. S.*, 52, p. 137–252, 1980.
- [10] P. Deligne. Hodge cycles on abelian varieties. Dans *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, édité par P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, et K.-y. Shih, tome 900 de *Lecture Notes in Math.*, chap. I, pages 9–100. Springer-Verlag, 1982.
- [11] P. Deligne et L. Illusie. Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques. Dans *Surfaces algébriques*, édité par J. Giraud, L. Illusie, et M. Raynaud, tome 868 de *Lecture Notes in Math.*, pages 80–137. Springer-Verlag, 1981. Exposé 5.
- [12] P. Deligne et J. S. Milne. Tannakian categories. Dans *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, édité par P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, et K.-y. Shih, tome 900 de *Lecture Notes in Math.*, chap. II, pages 101–228. Springer-Verlag, 1982.
- [13] J.-M. Fontaine. Le corps des périodes p -adiques. Dans *Périodes p -adiques, séminaire de Bures 1988*, tome 223 de *Astérisque*, pages 59–111. Soc. Math. France, 1994. Avec un appendice par P. Colmez.

- [14] J.-M. Fontaine. Représentations p -adiques semi-stables. Dans *Périodes p -adiques, séminaire de Bures 1988*, tome 223 de *Astérisque*, pages 113–184. Soc. Math. France, 1994.
- [15] J.-M. Fontaine et B. Mazur. Geometric Galois representations. Dans *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem*, édité par J. Coates et S. T. Yau, tome I de *Ser. Number Theory*, pages 41–78. International Press Inc., 1995.
- [16] A. Grothendieck, M. Raynaud, et D. S. Rim. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, tome 288 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I). Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.
- [17] N. M. Katz. Slope filtration of F -crystals. Dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes (I)*, tome 63 de *Astérisque*, pages 113–163. Soc. Math. France, 1978.
- [18] N. M. Katz. Serre–Tate local moduli. Dans *Surfaces algébriques*, édité par J. Giraud, L. Illusie, et M. Raynaud, tome 868 de *Lecture Notes in Math.*, pages 138–202. Springer-Verlag, 1981. Exposé 5bis.
- [19] J. S. Milne. *Étale cohomology*. Princeton Univ. Press, 1980.
- [20] B. J. J. Moonen. Linearity properties of Shimura varieties, I. *J. Algebraic Geom.*, 7, p. 539–567, 1998.
- [21] B. J. J. Moonen. Linearity properties of Shimura varieties, II. *Compos. Math.*, 114, p. 3–35, 1998.
- [22] D. Mumford. Families of abelian varieties. Dans *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, édité par A. Borel et G. D. Mostow, tome 9 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 347–351. Amer. Math. Soc., 1966.
- [23] D. Mumford. A note of Shimura’s paper “Discontinuous groups and abelian varieties”. *Math. Ann.*, 181, p. 345–351, 1969.
- [24] D. Mumford et J. Fogarty. *Geometric invariant theory*, tome 34 de *Ergeb. Math. Grenzgeb.* Springer-Verlag, deuxième édition, 1982.
- [25] R. Noot. The canonical embedding of stable curves. Preprint 520, Rijksuniversiteit Utrecht, 1988.
- [26] R. Noot. *Hodge classes, Tate classes, and local moduli of abelian varieties*. Thèse de doctorat, Rijksuniversiteit Utrecht, 1992.
- [27] R. Noot. Abelian varieties—Galois representations and properties of ordinary reduction. *Compos. Math.*, 97, p. 161–171, 1995.
- [28] R. Noot. Classe de conjugaison du frobenius des variétés abéliennes à réduction ordinaire. *Ann. de l’Institut Fourier*, 45, p. 1239–1248, 1995.

- [29] R. Noot. Models of Shimura varieties in mixed characteristic. *J. Algebraic Geom.*, 5, p. 187–207, 1996.
- [30] R. Noot. Abelian varieties with ℓ -adic Galois representation of Mumford’s type. *J. Reine Angew. Math.*, 519, p. 155–169, 2000.
- [31] R. Noot. Lifting Galois representations and a conjecture of Fontaine and Mazur. Prépublication 00-60, IRMAR, Université de Rennes 1, 2000.
- [32] R. Noot. On Mumford’s families of abelian varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 157(1), p. 87–106, 2001.
- [33] A. Ogus. Hodge cycles and crystalline cohomology. Dans *Hodge cycles, motives, and shimura varieties*, édité par P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, et K. y. Shih, tome 900 de *Lecture Notes in Math.*, chap. VI, pages 357–414. Springer-Verlag, 1982.
- [34] F. Oort. Newton polygon strata in the moduli space of abelian varieties. Dans *Moduli of abelian varieties*, édité par C. Faber, G. van der Geer, et F. Oort, tome 89 de *Progr. Math.*, pages 417–440. Birkhäuser, 2001.
- [35] R. Pink. ℓ -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford–Tate conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 495, p. 187–237, 1998.
- [36] H. Pohlmann. Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type. *Ann. of Math.*, 88, p. 161–180, 1968.
- [37] M. Schlessinger. Functors of Artin rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 130, p. 208–222, 1968.
- [38] J-P. Serre. Lettre à Ribet, 1–1–1981. Publiée dans [42, 133].
- [39] J-P. Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge–Tate. Dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes (III)*, tome 65 de *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, 1978. Publié aussi dans [40, 119].
- [40] J-P. Serre. *Œuvres — Collected papers*. Springer-Verlag, 1986.
- [41] J-P. Serre. Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ -adiques. Dans *Motives*, édité par U. Jansen, S. Kleiman, et J.-P. Serre, tome 55, Part 1 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 377–400. Amer. Math. Soc., 1994. Publié aussi dans [42, 161].
- [42] J-P. Serre. *Œuvres — Collected papers, Volume IV*. Springer-Verlag, 2000.
- [43] J-P. Serre et J. Tate. Good reduction of abelian varieties. *Ann. of Math.*, 88, p. 492–517, 1968. Publié aussi dans [40, 79].
- [44] G. Shimura. Discontinuous groups and abelian varieties. *Math. Ann.*, 168, p. 171–199, 1967.

- [45] G. Shimura. On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Ann. of Math.*, 91, p. 144–222, 1970.
- [46] G. Shimura et Y. Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*. Publ. math. soc. Japan. math. soc. Japan, 1961.
- [47] J. Tate. p -Divisible groups. Dans *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer-Verlag, 1966.
- [48] J. Tate. Classes d’isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d’après T. Honda). Dans *Séminaire Bourbaki*, tome 179 de *Lecture Notes in Math.*, pages 95–110. Springer-Verlag, 1969. Exposé 352, novembre 1968.
- [49] R. Taylor. Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur. e-print, Harvard university, 2000.
- [50] T. Tsuji. p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2), p. 233–411, 1999.
- [51] J.-P. Wintenberger. Motifs et ramification pour les points d’ordre fini des variétés abéliennes. Dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1986-87*, tome 75 de *Progr. Math.*, pages 453–471. Birkhäuser, 1988.
- [52] J.-P. Wintenberger. Relèvement selon une isogénie de systèmes ℓ -adiques de représentations galoisiennes associés aux motifs. *Invent. Math.*, 120, p. 215–240, 1995.

Rutger Noot

I. R. M. A. R.

Université de Rennes 1

Campus de Beaulieu

35042 Rennes Cedex

France

e-mail : `noot@univ-rennes1.fr`

http : `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~noot`