Calcul différentiel et intégral, TD 0 : applications linéaires.

Exercice 1 : Topologie sur les espaces vectoriels normés. Soit E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E.

1. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que les topologies définies par N_1 et N_2 sur E coincident, c'est-à-dire que leurs ouverts sont les mêmes.
2. Réciproquement, si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, montrer qu'il existe une suite qui tend vers 0 pourN_1 et pas pour N_2. Utilise cette suite pour construire une suite qui converge pour l'une des normes sans converger pour l'autre. Déduire que les topologies définies par N_1 et N_2 ne sont pas les mêmes.

Exercice 2 : Applications linéaires inversibles. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que u est inversible si et seulement si u est ouverte.
2. On suppose u inversible. Montrer que
$$B(0, \|u^{-1}\|^{-1}) \subset u(B(0,1)) \subset B(0, \|u\|)$$
3. On suppose u inversible. On définit $m(u) := \min\{\|u(x)\| \mid \|x\| = 1\}$. Montrer que $m(u) = \|u^{-1}\|^{-1}$. On procédera par double inégalité, en considérant des vecteurs unitaires qui minimisent $\|u(x)\|$ ou qui maximisent $\|u^{-1}(x)\|$.
4. En déduire que $B(0, \|u^{-1}\|^{-1})$ est exactement la plus grande boule contenue dans $u(B(0,1))$.
5. Montrer que si $e \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|e\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - e$ est inversible d'inverse $\sum_0^\infty e^k$.
6. En déduire que si u est inversible et $\|e\| < \|u^{-1}\|^{-1}$ alors $u + e$ est inversible.
7. Montrer que $\|(u+e)^{-1}\|^{-1} \geq \|u^{-1}\|^{-1} - \|e\|$.
8. En déduire que si $u(B(0,1))$ contient la boule de taille r, $u + e(B(0,1))$ contient la boule de taille $r - \|e\|$.

Exercice 3 : Le même dans le cadre continu (facultatif mais intéressant). Dans cet exercice, $B(0,1)$ représentera exceptionnellement la boule **fermée**. Soit $f := \mathrm{Id} + \varphi : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$, où $\|\varphi\|_\infty = \varepsilon$ est petit. On veut démontrer que l'image de f contient la boule de taille $1 - \varepsilon$. On raisonne par l'absurde.

1. Montrer qu'il existe $p \in B(1-\varepsilon') \backslash \mathrm{Im}\, f$, avec $\varepsilon' > \varepsilon$.
2. Montrer que $f(S^{n-1}(1)) \cap B(1-\varepsilon') = \emptyset$.

Soit π la projection radiale sur $S^{n-1}(1)$ de centre p. Autrement dit, $\pi(x)$ le le point d'intersection entre la demi-droite $[p, x)$ et $S^{n-1}(1)$.

3. montrer que $g := \pi \circ f$ est bien définie, applique $B(0,1)$ sur $S^{n-1}(1)$ et vérifie $\|g_{|S^{n-1}(1)} - \mathrm{Id}\,\|_\infty < \varepsilon$.
4. En déduire que pour ε suffisamment petit (à préciser), la composition de g par l'antipodie est une application de $B(0,1)$ dans lui-même sans point fixe. Ceci entre en contradiction avec le théorème de Brouwer.

Exercice 4 : Applications linéaires injectives, surjectives. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$.
2. Si $n < m$, montrer que les applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont denses dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
3. Si $n > m$, montrer que les applications linéaires surjectives sont denses dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.