Calcul différentiel et intégral, TD 1 : différentiabilité.

Exercice 1 :

1. Soit $f(x,y) = x^3 + \sqrt{x^2 + y^4 + 1}$. Calculer la dérivée de f dans la direction $(1,0)$. Comparer cette dérivée avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
2. Soit $g(x,y,z) = \frac{z}{x^4+1} - yz^2$. Calculer la dérivée de g dans les directions $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$.
3. Soit $h(x,y,z) = (e^x - \sqrt{z^4+1}, yz)$. Calculer la dérivée de h dans les directions $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ et $(2,1,1)$.
4. Calculer les matrices jacobiennes de f, g et h.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en t_0 si et seulement si f est différentiable en t_0. Montrer que dans ce cas $df(t_0) \cdot h = f'(t_0)h$.

Exercice 3 : Inversion des matrices.

1. Vérifier que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\mathcal{I} : A \mapsto A^{-1}$ définie sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est différentiable en l'identité et calculer sa différentielle.
3. Montrer que $\mathcal{I}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4 : Applications multilinéaires. Soient E_i et F des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f : E_1 \times E_2 \to F$ une fonction bilinéaire. Calculer $f'(x_1, x_2)$.
2. Même question avec une application multinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$.

Application : calcul de $\det(e^A)$. On considère la fonction $f(t) := \det(e^{tA})$.

3. Calculer la différentielle de $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en l'identité, puis en $M \in M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $f'(t) = \mathrm{tr}\,(A) f(t)$.
5. En déduire $\det e^{tA}$.

Exercice 5 : Un contre-exemple. Donner un exemple de fonction sur $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^1$ sauf en 0, ayant des dérivées directionnelles dans toutes les directions issues de 0, mais non dérivable en 0. Donner un exemple de fonction sur $\mathbb{R}^2$ dérivable selon toutes les droites issues de 0 mais pas continue en 0.

Exercice 6 : L'inversion. Soit

$$\begin{array}{rcccl} i & : & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ & & x & \longmapsto & \frac{x}{\|x|^2}. \end{array}$$

1. Représenter graphiquement cette application.
2. Montrer que l'ensemble des points fixes de i est la sphère de rayon 1.
3. Montrer que i est différentiable, et calculer sa différentielle sur $S^{n-1}(1)$ en l'exprimant dans une base intelligemment choisie.
4. Montrer de même que $\mathrm{Jac}\,(f)(x) = -\frac{1}{\|x\|^{2n}}$.

Exercice 7 : Unicité de point fixe. On considère les équations suivantes :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y), y = \frac{1}{2}\sin(x-y).$$

1. Trouver une solution à ces équations.
2. Soit $f(x,y) = (\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\sin(x-y))$. Majorer la norme de la différentielle de f.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f a au plus un point fixe.
4. En conclure que le système d'équations admet une unique solution.

Exercice 8 : Gradient. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $p \in U$. Montrer qu'il existe un vecteur $X(p) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \quad f'(p)v = \langle X(p), v\rangle.$$

2. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^k$, ∇f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

On appellera ce vecteur le gradient de f en p et on le noter $\nabla f(p)$ ou $\vec{\nabla} f(p)$. On suppose dans la question suivante que $f'(p) \neq 0$ et qu'il existe une application de classe $\mathcal{C}^1$ $u : B(0,1) \subset \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d$ telle que $u(0) = p$, $u'(0)$ est injective, et $f \circ u = f(p)$ est constante.

3. Montrer que $df(p)$ s'annule sur $\operatorname{Im} u'(0)$.
4. Montrer que $\nabla f(p) \perp \operatorname{Im} u'(0)$. Autrement dit, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

Exercice 9 : Applications différentiables et volume. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application Lipschitzienne. On suppose $m > n$.

1. Montrer que f est Lipschitzienne pour la norme $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ sur $\mathbb{R}^n$. On notera K cette constante de Lipschtiz. On appelle pavés les boules de cette norme.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que U est recouvert par $C\varepsilon^{-n}$ pavés de taille ε.
3. En déduire que $f(U)$ est recouvert par $C\varepsilon^{-n}$ boules de taille $K\varepsilon$ de $\mathbb{R}^m$.
4. En déduire que le volume de $f(U)$ est nul.
5. En conclure que si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, avec $m > n$, le volume de $f(U)$ est nul (on admettra qu'une union dénombrable d'ensembles de volumes nuls est de volume nul).