Calcul différentiel et intégral, TD 2 : dérivées d'ordres supérieurs.

Exercice 1 :

1. Spécifier les espaces de départ et d'arrivée, et calculer la dérivée de $f \circ g$ où $g(t) = (t^2, \exp(-3t))$ et $f(x,y) = (3xy, 2x^2 + 4y)$.
2. Spécifier les espaces de départ et d'arrivée, et calculer la différentielle de $f \circ g$ avec $g(A) = A^{-1}$ et $f(M) = \det(M)$.
3. Déterminer le DL de $f(x,y) = \sin(xy)$ à l'ordre 3 en $(0,0)$. En déduire $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0)$.
4. Déterminer le DL de $f(x,y) = e^{x^2 \sin(y)}$ à l'ordre 5 en $(0,0)$. En déduire $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(0,0)$.

Exercice 2 : Extrema : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x-y)^2 - e^{-(x+y)^2 - z^2}$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. En faisant un développement limité, calculer $Hess(f)$ en les points critiques.
3. En déduire la nature des points critiques.

Exercice 3 : Développements limités en dimension supérieure. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $x_0 \in U$. On veut démontrer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)(h,h) + o(\|h\|^2). \tag{1}$$

On suppose dans un premier temps que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur U.

1. On fixe $h \in \mathbb{R}^n$. On pose $g(t) := f(x_0 + th)$. Montrer que g est trois fois dérivable et calculer $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0)$.
2. En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à g, montrer que
$$g(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)(h,h) + R(h)$$
où $\|R(h)\| \leq C\|h\|^3$ avec C indépendant de h.
3. En déduire la formule (1) dans ce cas.

On suppose à présent f de classe $\mathcal{C}^2$ seulement. Soit $\varepsilon > 0$ tels que $B_\varepsilon := B(x_0, \varepsilon) \subset U$. On pose

$$\begin{array}{cccl} \tilde{f} & : & B_\varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & h & \longmapsto & f(x_0 + h). \end{array}$$

4. Calculer $\tilde{f}(0), \tilde{f}'(0)$ et $\tilde{f}''(0)(u,u)$ en fonction des différentielles de f.
5. Soit à présent $g(h) = \tilde{f}(h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)(h,h)$. Montrer que $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ (pour g'', on notera que $g''(0)$ étant symétrique, il suffit de montrer que $g''(0)(u,u) = 0 \ \forall u$).
6. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $g(h) = o(\|h\|^2)$.
7. En déduire la formule (1).

Exercice 4 :

1. Soit $A : [0,1] \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ un chemin de matrices de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$
$$\frac{dA(t)}{dt}(u) = \frac{dA(t)u}{dt}.$$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^2$. On rappelle que pour tous $x_0 \in U$, $d^2 f(x_0) = d_{x_0}(x \mapsto f'(x))$.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $d^2 f(x_0)u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$d^2 f(x_0)u(v) = d_{x_0}\left[x \mapsto f'(x)v\right](u).$$

Exercice 5 : Points singuliers de courbes : Soit $\gamma : I \to V \subset \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, définissant un arc paramétré du plan. On fixe un point t_0 intérieur à I. Soient p le plus petit entier strictement positif tel que $v = \frac{1}{p!}\gamma^{(p)}(t_0)$ est non nul et q le plus petit entier $> p$ tel que $w = \frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)$ soit linéairement indépendant de v (on suppose l'existence de p et q).

1. On note $A = \gamma(t_0)$ et $M(h) = \gamma(t_0 + h)$. En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que
$$\overrightarrow{AM(h)} = X(h)v + Y(h)w + o(h^q),$$
où $X(h) = h^p + o(h^p)$ et $Y(h) = h^q + o(h^q)$.
2. Montrer que v est la direction de la tangente à l'arc paramétré par γ en A.
3. Dessiner l'allure de l'arc paramétré au voisinage de A dans la base (v, w) dans les cas suivants :
   a) p impair et q pair : point ordinaire.
   b) p impair et q impair : inflexion.
   c) p pair et q impair : rebroussement de première espèce.
   d) p pair et q pair : rebroussement de deuxième espèce.