Calcul différentiel et intégral, TD 3 : Théorème d'inversion locale et des fonctions implicites.

Exercice 1 : Exponentielle de matrices. Soit $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'exponentielle. On admettra dans un premier temps que exp est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que si $AB = BA$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $d\exp(0) = \mathrm{Id}$.
3. En déduire que exp définit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre un voisinage de 0 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de Id dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On souhaite maintenant démontrer que exp est de classe $\mathcal{C}^1$. On fixe une norme d'opérateur sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $P_N(A) := \sum_0^N \frac{A^n}{n!}$.

4. Montrer que $P_N(A+h) - P_N(A) = \sum_{n=1}^N L_{n,A}(h) + o(\|h\|)$, où
$$L_{n,A}(h) = \frac{1}{n!}\big(A^{n-1}h + A^{n-2}hA + \cdots + hA^{n-1}\big).$$
5. Montrer que $L_{n,A}$ est linéaire et que $\|L_{n,A}\| \leq \frac{\|A\|^{n-1}}{(n-1)!}$.
6. En déduire que $dP_N(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ converge normalement.
7. En déduire que exp est dérivable, de dérivée continue.

Exercice 2 : Soit $\Sigma := \{xz + yz^4 - xy = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. On pose $\Phi(x,y,z) = xz + yz^4 - xy$. Soit $P := (1,1,1) \in \Sigma$.

1. Montrer que $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(P) = 5$. En déduire qu'il existe un voisinage V de P dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage D de $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(1,1) = 1$ et $\Sigma \cap V = \{z = \varphi(x,y)\}$.
2. Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$.

Exercice 3 : Racines d'un polynôme, version inversion locale. On rappelle l'expression du i-ème polynôme symétrique élémentaire en n-variables :

$$\sigma_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\{j_1,\ldots,j_i\} \subset \{1,\ldots,n\}} X_{j_1} \cdot \cdots \cdot X_{j_i}.$$

On définit

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \big(\sigma_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, \sigma_n(x_1,\ldots,x_n)\big). \end{array}$$

Enfin, on considèrera
$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists i,j,\ x_i = x_j\}$$
(fat diagonal en anglais).

Soit $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{R}^n[X]$ un polynôme réel scindé, pour lequel on note $r_1, \ldots, r_n$ les racines.

1. Rappeler que $a_{n-i} = (-1)^i \sigma_i(r_1, \ldots, r_n)$.
2. Montrer que σ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et calculer la jacobienne de σ.
3. Montrer que $\mathrm{Jac}(\sigma)(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

4. En déduire que σ définit un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^n \backslash \Delta$.
5. En déduire que si un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n(X)$ a n racines réelles distinctes, Il existe un difféomorphisme $Z : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}_n[X] \to \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, défini sur un voisinage de P, et qui vérifie $Q(Z_i(Q)) = 0\ \forall Q \in \mathcal{U}$, et $i \in [1 \dots n]$ (les Z_i sont les composantes de Z). Autrement dit, sur $\mathcal{U}$, l'application qui à un polynôme associe ses n racines est bien définie, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4 : Racines d'un polynôme, version fonctions implicites. Soit $P_t(x) = x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \cdots + a_0(t)$, où $t \in \mathbb{R}$, et $\Phi : (t, x) \mapsto P_t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^r$. On suppose que x_0 est une racine simple de P_0.

1. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ telle que $x(0) = x_0$ et $P_t(x(t)) = 0$.
2. Montrer que
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} P_t(x_0).$$
3. En déduire que $x'(0) = -\frac{1}{P'(x_0)} \frac{d}{dt}\big|_{t=0} P_t(x_0)$.

Exercice 5 : Théorème de Picard à paramètres. Soit $F : (-1, 1) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $f_t := F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose que $f_0 = 0$ et que $f_0'(0)$ n'a pas 1 pour valeur propre. On pose $G(t, x) := F(t, x) - x$

1. Montrer qu'il existe une application de classe $\mathcal{C}^1$
$$\begin{array}{cccc} x & : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$
telle que $G(t, x(t)) = 0$.
2. En déduire qu'il existe une application $\mathcal{C}^1$ $x(t)$ définie pour $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ telle que $f_t(x(t)) = x(t)$.
3. En déduire que si $F(t, \cdot) : (-1, 1) \times U \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et 0 est un point fixe contractant de $F(0, \cdot)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une application $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que $F(t, x(t)) = x(t)$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Exercice 6 : Inversion globale, un exemple, deux approches : Soit $\Omega := \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ et
$$\begin{array}{cccc} f & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \longmapsto & (e^x + y, e^y + x). \end{array}$$

1. Montrer que $(x, y) \mapsto (e^x, e^y)$ est un difféomorphisme sur $\Omega_\varepsilon := \{x > \varepsilon, y > \varepsilon\}$, calculer son inverse, et une constante de Lispchitz de son inverse.
2. En appliquant le théorème d'inversion globale, montrer que f est un difféomorphisme sur son image.

On veut redémontrer le résultat précédent autrement.

1. Montrer que $\mathrm{Jac}\,(f)$ ne s'annule pas sur Ω.
2. Montrer que f est injective sur Ω. On pourra utiliser que pour $t, t' > 0$, $|e^t - e^{t'}| > |t - t'|$.
3. En déduire que f est un difféormorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de Ω sur son image $\Omega' := f(\Omega)$.
4. Déterminer et dessiner Ω'.