Courbure en géométrie Riemannienne

1. Différentes notions de courbure :

Rappel :
- $TM \to M$, ∇^g connexion de Levi-Civita sur TM.
- $X, Y \in T_pM$: $R^\nabla(X,Y) : T_pM \longrightarrow T_pM$
  $$Z \longmapsto \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$
- R^∇ antisymétrique en X, Y.

Def 1 (Tenseur de courbure) : $R(X,Y,Z,T) = g(R^\nabla(X,Y)Z, T)$.

Prop :
i) $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T)$
ii) $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$
iii) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$
iv) $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$ (Bianchi).

Preuve : i) déjà dit

ii) On étend X,Y,Z,T en des champs de vecteurs qui commutent ds 1 petit voisinage de p. Alors
$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) &= g(\nabla_Y\nabla_X Z, T) - g(\nabla_X\nabla_Y Z, T) \\
&= Y.g(\nabla_X Z, T) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) - X.g(\nabla_Y Z, T) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) \\
&= Y.X.\cancel{g(Z,T)} - Y.\cancel{g(Z,\nabla_X T)} - X.\cancel{g(Z,\nabla_Y T)} \\
&\quad + g(Z, \nabla_X\nabla_Y T) - X.Y\cancel{g(Z,T)} + \cancel{Y.g(Z,\nabla_Y T)} \\
&\quad + \cancel{X.g(Z,\nabla_X T)} - g(Z, \nabla_Y\nabla_X T) \\
&= g(Z, \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X T) = -R(X,Y,T,Z).
\end{aligned}$$

iv) Idem : on étend X,Y,Z,T en des chps de vecteurs qui commutent.
$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X \\
&\quad + \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y \\
&= \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = 0.
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) &= -R(Y,Z,X,T) - R(Z,X,Y,T) \\
&= R(Y,Z,T,X) + R(Z,X,T,Y) \\
&= -R(Z,T,Y,X) - R(T,Y,Z,X) + R(Z,X,T,Y)
\end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) - R(Z,T,X,Y) &= R(\underset{X'}{Z}, \underset{Y'}{X}, \underset{Z'}{T}, \underset{T'}{Y}) - R(T,Y,Z,X) \\
&= R(Z',X',T',Y') - R(T',Y',Z',X') \\
&= R(T,Z,Y,X) - R(Y,X,T,Z) \\
&= R(Z,T,X,Y) - R(X,Y,Z,T) \quad \text{(on utilise i))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2[R(X,Y,Z,T) - R(Z,T,X,Y)] = 0 \qquad \square.$$

Conséquence : $R : \Lambda^2(TM) \times \Lambda^2(TM) \longrightarrow \mathbb{R}$ symétrique.

Def 2 : (Courbure sectionnelle): $\Pi \subset T_pM$, $\sigma(\Pi) := R(e_1, e_2, e_1, e_2)$
où (e_1, e_2) = BON de Π.
Avec la consequence précédente : si (X,Y) base de Π,
$\sigma(\Pi) = \dfrac{R(X,Y,X,Y)}{\|X \wedge Y\|^2}$ où $\|X \wedge Y\|$ = aire Riemannienne du losange engendré par (X,Y).

Thm : Bianchi $\Longrightarrow$ la courbure sectionnelle détermine le tenseur de courbure.

Def 3 : (Courbure de Ricci) :

$Ric_p(X,Y) := tr(V \longmapsto R^\nabla(X,V)Y) = \sum \langle R^\nabla(X,e_i)Y, e_i \rangle$ où
(e_i) = BON de T_pM.
$\Longrightarrow$ $Ric_p(X,Y)$ symétrique (et tenseur : ne depend que de $X(p), Y(p)$).

Rem : Puisque Ric_p est bilinéaire symétrique sur T_pM, et que g_p PS sur T_pM, $\exists$ matrice A_p symétrique tq $Ric_p(X,Y) = g_p(X, A_pY)$.

Def 4 (Courbure scalaire) :

$s(p) := Tr\, A_p = \sum_{i,j} Ric(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{i,j} \sigma(\langle e_i, e_j \rangle)$
où les (e_i) BON de T_pM.

2. Courbure et géométrie locale :

Thm 1 (longueur des petits cercles) : $\Pi \subset T_pM$ 2 plan , $C_r(p,\Pi) = \exp_p(S_r \cap \Pi)$

$$l_g(C_r) = 2\pi r \left(1 - \frac{\sigma(\Pi)}{6} r^2 + o(r^2)\right).$$

Thm 2 (Volume des petites boules) : $B_p(r) := \exp_p(B(r))$

$$Vol(B_p(r)) = Vol\, B(1) . r^n \left(1 - \frac{s(p)}{6(n+2)} r^2 + o(r^2)\right)$$

Thm 3 (Bishop-Gunther) : (M,g) complete, $r < injrad(M,p)$, $B_p(r)$:
i) Si $Ric \geq (n-1)kg$ alors $Vol(B_p(r)) \leq V^k(r)$ où
$V^k(r) = Vol(B(r), g_k)$ où g_k metrique sur $\mathbb{R}^n$ à courbure constante $= k$.
ii) Si $\sigma(\Pi) \leq k$ $\forall \Pi$ 2 plan de T_pM, $\forall p \in M$, alors
$Vol\, B(p,r) \geq V^k(r)$

3. Courbure et géométrie globale :

Thm (Myers) : (M, g) var. riem complète tq $\mathrm{Ric} \geq \frac{n-1}{r^2} g$
Alors :
$$\mathrm{diam}(M, g) \leq \mathrm{diam}(S^n(r))$$
$\pi_1(M)$ est fini.

Thm (Cartan - Hadamard) : (M, g) complète. On suppose que la courbure sectionnelle $K(\pi) \leq 0$ $\forall \pi \subset T_pM$, $\forall p \in M$. Alors $\forall p \in M$,
$\mathrm{Exp}_p : T_pM \longrightarrow M$ est un revêtement.
En particulier, si M est simplement co-exe, M difféo à $\mathbb{R}^n$.

Thm (Milnor) : (M, g) var compacte avec $K(\pi) < 0$ $\forall \pi$. Alors $\pi_1(M)$ a une $\nearrow$ exponentielle.

Rques :
- Myers : $\mathrm{Ric}(M) > \mathrm{Ric}(S^n) \Longrightarrow M$ est plus courbé et $\mathrm{diam}(M) \leq \mathrm{diam}(S^n)$.
- Cartan - Hadamard : $K \leq 0 + \pi_1(M) = 0 \Longrightarrow$ pas de Topologie, $\mathbb{R}^n$.
- Milnor : $K < 0$ + compacte $\Longrightarrow$ beaucoup de Topologie ($\pi_1(M)$ gpe)
- Conséquences : $\longrightarrow$ de Milnor : $\mathbb{T}^n$ n'a pas de métrique $K < 0$
  $\longrightarrow$ de Myers : $\mathbb{T}^n$ ——— $\mathrm{Ric} > 0$.
  ($\Rightarrow K > 0$ ne plus évident).
- $\mathrm{Ric} < 0$ ne dit rien : $\forall M, \exists g \mid \mathrm{Ric}(g) < 0$.