Crochets de Lie, courbure, même combat

1 Crochet de Lie

Théorème 1 *Soient* X, Y *des champs de vecteurs sur une variété* M *et* $p \in M$. *Notons* $[\Phi_X^\varepsilon, \Phi_Y^\varepsilon] := \Phi_Y^{-\varepsilon} \circ \Phi_X^{-\varepsilon} \circ \Phi_Y^\varepsilon \circ \Phi_X^\varepsilon$ *le commutateur des difféomorphismes* Φ_X^ε *et* Φ_Y^ε. *Alors*

$$[\Phi_X^\varepsilon, \Phi_Y^\varepsilon](p) = p + [X, Y](p)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Preuve : Rappelons que si (U, f) est une carte qui contient p, $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$ et $[f_*\Phi_Y^\varepsilon, f_*\Phi_X^\varepsilon] = f_*[\Phi_Y^\varepsilon, \Phi_X^\varepsilon]$ de façon évidente ($f_*\Phi_X^\varepsilon := f \circ \Phi_Y^\varepsilon \circ f^{-1}$). Il suffit donc de prouver le théorème pour X, Y des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons ensuite que si $M = \mathbb{R}^n$, on a la formule suivante du crochet :

$$[X, Y](p) = dY(p)X(p) - dX(p)Y(p) \tag{1}$$

On doit calculer un DL à l'ordre 2 de notre commutateur. Commençons par celui de $\Phi_X^\varepsilon(p)$. Dans le calcul suivant, on ne note en général pas la variable lorsqu'elle vaut p (et seulement dans ce cas). Ainsi, X désigne $X(p)$, dX désigne $dX(p)$ ...

$$\frac{d\Phi_X^\varepsilon(p)}{d\varepsilon} = X(\Phi_X^\varepsilon(p)) \qquad\qquad \left.\frac{d^2\Phi_X^\varepsilon(p)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dX(\Phi_X^\varepsilon(p))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = d_p$$

$$\begin{aligned}
\Phi_X^\varepsilon(p) &= p + \varepsilon \left.\frac{d\Phi_X^\varepsilon(p)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \Phi_X^\varepsilon(p) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon X(p) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} X(\Phi_X^\varepsilon(p)) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pX(X(p)) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Phi_Y^\varepsilon \circ \Phi_X^\varepsilon(p) &= \Phi_Y^\varepsilon\big(p + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pX(X(p))\big) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pX(X(p)) + \varepsilon Y(p + \varepsilon X) + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pY(Y(p)) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon(X + Y) + \frac{\varepsilon^2}{2}\big(d_pX(X) + d_pY(Y)\big) + \varepsilon^2 dY(X) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\Phi_X^{-\varepsilon} \circ \Phi_Y^\varepsilon \circ \Phi_X^\varepsilon(p) &= p + \varepsilon(X + Y) + \frac{\varepsilon^2}{2}\big(d_pX(X) + d_pY(Y)\big) + \varepsilon^2 dY(X) \\
&\quad - \varepsilon X\big(p + \varepsilon(X + Y)\big) + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pX(X) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon(X + Y) + \frac{\varepsilon^2}{2}\big(d_pX(X) + d_pY(Y)\big) + \varepsilon^2 dY(X) \\
&\quad - \varepsilon X(p) - \varepsilon^2 dX(X + Y) + \frac{\varepsilon^2}{2} d_pX(X) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + Y + \frac{\varepsilon^2}{2} dY(Y) + \varepsilon^2\big(dY(X(p)) - dX(Y(p))\big) + o(\varepsilon^2) \\
&= p + \varepsilon Y + \frac{\varepsilon^2}{2} dY(Y) + \varepsilon^2 [X, Y](p) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\Phi_Y^{-\varepsilon}\circ\Phi_X^{-\varepsilon}\circ\Phi_Y^{\varepsilon}\circ\Phi_X^{\varepsilon}(p) &= p+\varepsilon Y+\frac{\varepsilon^2}{2}dY(Y)+\varepsilon^2[X,Y](p)\\ &\quad -\varepsilon Y(p+\varepsilon Y)+\frac{\varepsilon^2}{2}dY(p)+o(\varepsilon^2)\\ &= p+\varepsilon Y+\frac{\varepsilon^2}{2}dY(Y)+\varepsilon^2[X,Y](p)\\ &\quad -\varepsilon Y(p)-\varepsilon dY(Y)+\frac{\varepsilon^2}{2}dY(p)+o(\varepsilon^2)\\ &= p+\varepsilon^2[X,Y](p)+o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

2 Courbure

On rappelle qu'étant donné un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ muni d'une connexion linéaire ∇, on définit

$$R^\nabla(X,Y) := \nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}.$$

De plus, $R^\nabla(X,Y)(p) : E_p \to E_p$ est un endomorphisme linéaire de E_p, qui ne dépend que que de $X(p), Y(p)$.

On rappelle aussi que si $\mathcal{E} := (e_1,\dots,e_k)$ est une base de sections de E au-dessus d'un ouvert de trivialisation $p \in U \subset M$, toute section au-dessus de U s'écrit $s = \sum s_i e_i$ (donc les s_i sont des fonctions), et on a

$$\nabla_X s(p) = d_p^{\mathcal{E}} s(X) - A_p(X(p), s(p)),$$

où $d_p^{\mathcal{E}} s(X) := \sum X \cdot s_i(p) e_i$, et $A_p(X(p), s(p)) \in E_p$ est une application bilinéaire. On rappelle le lemme suivant qui donne une expression locale de la courbure :

Lemme 2 *Soit $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ des vecteurs de coordonnées locales autour du point p. On pose $A_x := A(\frac{\partial}{\partial x}, \cdot)$, $A_y := A(\frac{\partial}{\partial y}, \cdot)$. Finalement, on note $\frac{\partial^{\mathcal{E}} A_x}{\partial y}$ l'endomorphisme de E_p dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est la dérivée selon y de la matrice de A_x dans la base $\mathcal{E}$. Alors,*

$$R^\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y A_x - A_x A_y. \tag{2}$$

Preuve : On a

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = d^{\varepsilon} s(\frac{\partial}{\partial x}) - A(\frac{\partial}{\partial x}, s) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - A_x\right) s,$$

où $\frac{\partial s}{\partial x} := d^{\varepsilon} s(\frac{\partial}{\partial x})$ est la dérivation des coordonnées de s dans la base $\mathcal{E}$. Alors

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - A_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - A_y\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - A_x \circ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \circ A_y + A_x A_y.$$

Et comme A_y est linéaire, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(A_y(s)\big) = \frac{\partial A_y}{\partial x}(s) + A_y\big(\frac{\partial s}{\partial x}\big),$$

donc

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - A_x \circ \frac{\partial}{\partial y} - A_y \circ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_x A_y.$$

De même,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - A_y \circ \frac{\partial}{\partial x} - A_x \circ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y A_x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} R^\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \text{ car } \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0 \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y A_x - A_x A_y. \end{aligned}$$ □

Le but de la partie est de prouver l'interprétation suivante de la courbure :

Théorème 3 *Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇. Soient X, Y des champs de vecteurs qui commutent ($[X, Y] \equiv 0$, donc $\Phi_Y^{-\varepsilon} \circ \Phi_X^{-\varepsilon} \circ \Phi_Y^{\varepsilon} \circ \Phi_X^{\varepsilon} = Id$), définis sur le voisinage d'un point p de M. On définit $P_X^t(q) := P_{\gamma_q}^t$ le transport parallèle pour ∇ le long de la courbe $\gamma(t) := \Phi_X^t(q)$. Alors $[P_X^\varepsilon, P_Y^\varepsilon] := P_Y^\varepsilon \circ P_X^{-\varepsilon} \circ P_Y^\varepsilon \circ P_X^\varepsilon$ est un isomorphisme de E_p qui vaut*

$$[P_X^\varepsilon, P_Y^\varepsilon] := Id + \varepsilon^2 R^\nabla(X, Y) + o(\varepsilon^2).$$

Preuve : Soient X, Y des champs de vecteurs qui commutent sur M, et $p \in M$. Le premier lemme permet de se ramener au cas où $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Lemme 4 *Soit X, Y des champs de vecteurs sur une variété M qui commutent. Autour d'un point $p \in M$, il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ autour de p telles que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$.*

Preuve : on complète $X(p), Y(p)$ en une base $(X(p), Y(p), V_3(p), \ldots, V_n(p))$ de T_pM et on étend les $V_i(p)$ en des champs de vecteurs V_i. L'application $\Phi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \Phi_X^{t_1} \circ \Phi_Y^{t_2} \circ \Phi_{V_3}^{t_3} \circ \cdots \circ \Phi_{V_n}^{t_n}$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de p, dont la réciproque fournit la carte locale demandée. □

Nous devons à présent calculer un DL à l'ordre 2 de $[P^\varepsilon_{\frac{\partial}{\partial x}}, P^\varepsilon_{\frac{\partial}{\partial y}}](p)$. Commençons par celui de $P^\varepsilon_{\frac{\partial}{\partial x}}$. Comme le théorème nous intéresse pour ε petit, on peut supposer que tout se passe dans une carte (avec $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$) dans laquelle on a une trivialisation du fibré. On fixe alors une base de sections $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_k)$, pour une section s au dessus de cette carte, on écrit $s = \sum s_i e_i$, $(s) = {}^t(s_1, \ldots, s_n)$ où les s_i sont des fonctions. On notera dans la suite $p + t\frac{\partial}{\partial x} := \Phi^t_{\frac{\partial}{\partial x}}(p)$. L'équation du transport parallèle le long de $\frac{\partial}{\partial x}$ est :

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} s)\big(p + t\frac{\partial}{\partial x}\big) = 0,$$

ou encore

$$d^{\mathcal{E}}_{p+t\frac{\partial}{\partial x}} s(\frac{\partial}{\partial x}) - A_{p+t\frac{\partial}{\partial x}}\big(\frac{\partial}{\partial x}, s\big) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^{\mathcal{E}} s}{\partial x}(p + t\frac{\partial}{\partial x}) = A_x(p + \frac{\partial}{\partial x})s.$$

Posons alors $s(t) := \big(s_i\big(p + t\frac{\partial}{\partial x}\big)\big)$. On a alors

$$\frac{ds}{dt} = A_x\big(p + t\frac{\partial}{\partial x}\big)s(t),$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\big(A_x(p+t\frac{\partial}{\partial x})s\big) \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x}s(t) + A_x\big(p+t\frac{\partial}{\partial x}\big)\frac{ds}{dt} && \text{par bilinéarité} \\
&= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x\big(p+t\frac{\partial A_x}{\partial x}\big)^2\right)s(t).
\end{aligned}$$

Finalement, si s est le transport parallèle le long de $p+t\frac{\partial}{\partial x}$, on a

$$P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}}(s(0)) = s(0) + \varepsilon A_x(p)s(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x(p)^2\right)s(0) + o(\varepsilon^2),$$

donc

$$P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} = \mathrm{Id}\, + A_x(p)\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x(p)^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).$$

Alors (dans la formule ci-dessous, on n'écrit pas la variable lorsqu'on applique en p : $A_x(p)$ et noté A_x) :

$$\begin{aligned}
P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial y}} \circ P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} &= \mathrm{Id}\, + A_x\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + A_y\big(p+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\big)(\mathrm{Id}\, + A_x\varepsilon) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id}\, + (A_x + A_y)\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_x^2 + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + A_yA_x\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id}\, + (A_x + A_y)\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + 2\frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x^2 + A_y^2 + 2A_yA_x\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
P^{-\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} \circ P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial y}} \circ P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} &= \mathrm{Id}\, + (A_x + A_y)\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + 2\frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x^2 + A_y^2 + 2A_yA_x +\right)\frac{\varepsilon^2}{2} \\
&\quad - A_x\big(p+\varepsilon(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})\big)(\mathrm{Id}\, + (A_x + A_y)\varepsilon)\varepsilon + (\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x^2)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id}\, + (A_x + A_y)\varepsilon + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + 2\frac{\partial A_x}{\partial y} + A_x^2 + A_y^2 + 2A_yA_x +\right)\frac{\varepsilon^2}{2} \\
&\quad - A_x\varepsilon - (\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\varepsilon^2 - A_x(A_x + A_y)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id}\, + A_y\varepsilon + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_yA_x - A_xA_y\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id}\, + A_y\varepsilon + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + R^{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \text{par l'équation (2).}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
P^{-\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial y}} \circ P^{-\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} \circ P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial y}} \circ P^{\varepsilon}_{\frac{\partial}{\partial x}} &= \mathrm{Id} \, + A_y\varepsilon + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + R^{\nabla}\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)\varepsilon^2 \\
&\quad - A_y\big(p + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\big)(\mathrm{Id} \, + A_y\varepsilon) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id} \, + A_y\varepsilon + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + R^{\nabla}\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)\varepsilon^2 \\
&\quad - A_y\varepsilon - \big(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y}\big)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Id} \, + R^{\nabla}\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \qquad \square
\end{aligned}$$