Partitions de l'unité

Nous avons démontré en cours que l'existence de partitions de l'unité sur les variétés compactes. Lorsque la variété est σ-compacte, on a le même énoncé.

Théorème 1 *Soit M^n une variété lisse, et $\mathcal{O} = (O_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{O}$, c'est-à-dire une collection de fonctions lisses $\rho_\alpha : M \to [0,1]$, vérifiant :*

(i) $\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \subset O_\alpha$,

(ii) $\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha \equiv 1$.

(iii) $(\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha)$ *est un recouvrement localement fini de* M.

Avant de prouver le théorème, il nous faut introduire quelques définitions et notations :

- Un recouvrement $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ est *plus fin* qu'un recouvrement $(U_\beta)_{\beta\in B}$ si $\forall\alpha \in A$, $\exists\beta \in B$, tel que $V_\alpha \subset U_\beta$. Un *rafinement* d'un recouvrement est un recouvrement plus fin.
- Un recouvrement ouvert (U_α) est localement fini si $\forall p \in M$, il existe un voisinage U_p de p tel que $\{\alpha \mid U_\alpha \cap U_p \neq \emptyset\}$ est un ensemble fini.
- Si (U, φ) est une carte de M (donc $\varphi : U \to B(1) \subset \mathbb{R}^n$), on note τU l'ouvert $\varphi^{-1}(B(\tau))$.
- Dans tout ce qui suit, on fixe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\rho : B(1) \to [0,1]$, à support compact dans $B(1)$ et qui vaut 1 sur $B(\frac{1}{2})$.

1 Rafinements

Lemme 2 *Toute variété (σ-compacte) vérifie $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, où K_n est compact et $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.*

Preuve : Par σ-compacité, $M = \cup K'_n$, et quitte à remplacer K'_n par $\cup_{i\leq n} K'_i$, on peut supposer que la suite K'_n est croissante pour l'inclusion. On définit K_n par récurrence :

- Pour $x \in K'_1$, soit U_x une carte autour de x, et soit X_1 un ensemble fini de points $x \in K'_1$, tels que
$$\cup_{x\in X_1} \frac{1}{2} U_x \supset K'_1.$$
On pose alors $K_1 := \displaystyle\bigcup_{x\in K'_1} \frac{1}{2}\overline{U}_x$.
- On définit K_2 de la façon suivante. $K'_2 \setminus \overset{\circ}{K}_1$ est un compact, donc recouvert par
$$\cup_{x\in X_2} \frac{3}{4} U_x$$
, où X_2 est un ensemble fini de $K'_2 \setminus \overset{\circ}{K}_1$. On pose alors
$$K_2 := \bigcup_{x\in X_1} \frac{3}{4}\overline{U}_x \cup \bigcup_{x\in X_2} \frac{3}{4}\overline{U}_x.$$
Evidemment, $K_2 \subset \overset{\circ}{K}_1$ et $K_2 \supset K'_2$.
- On suppose alors par récurrence que K_i est défini comme une union finie de boules de cartes fermées $(1-2^{-i})\overline{U}_x$, $x \in Y_i$. On définit alors K_{i+1} comme à l'étape précédente.

Le résultat de la récurrence est la construction d'une suite de compacts K_n, qui vérifient $K_{n+1} \supset \overset{\circ}{K}_n$, et $K_n \supset K'_n$, donc $M = \cup K_n$. $\square$

Lemme 3 *Tout recouvrement ouvert d'une variété admet un rafinement localement fini. Plus précisément, il existe un rafinement du type* $\left(\frac{1}{2}\tau(x)U_x\right)_{x\in X}$*, où le recouvrement* $\left(\tau(x)U_x\right)_{x\in X}$ *est localement fini.*

Preuve : Soit $M = \cup V_\alpha$ un recouvrement ouvert de M. Pour $x \in V_\alpha$, il existe une carte $U_{x,\alpha} \subset V_\alpha$ qui contient x (par commodité de notation, on posera $U_{x,\alpha} = \emptyset$ si $x \notin V_\alpha$). Le recouvrement $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in A, x\in X} U_{x,\alpha}$ est plus fin que V_α, donc tout recouvrement extrait de $(U_{x,\alpha})$ est un rafinement de V_α. Il reste donc à extraire de ce recouvrement un recouvrement localement fini.

Pour cela, écrivons $M = \cup K_n$, où $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ (lemme précédent), et posons $W_n := K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$. Remarquons que les W_n sont compacts, qu'ils recouvrent M, et que $W_n \cap K_{n-2} = W_n \cap {}^c \overset{\circ}{K}_{n+1} = \emptyset$. Par conséquent, pour $x \in W_n$, il existe $\tau(x,\alpha)$ tel que $\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap K_{n-2} = \tau(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap^c \overset{\circ}{K}_{n+1} = \emptyset$. Alors $W_n \subset \bigcup_{x\in W_n, \alpha\in A} \frac{1}{2}\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha}$, et par compacité de W_n, il existe un ensemble fini $I_n \subset M \times A$, tel que $W_n \subset \bigcup_{(x,\alpha)\in I_n} \frac{\tau}{(}x,\alpha)W_n$. La famille $\left(\frac{1}{2}\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N},(x,\alpha)\in I_n}$ est un recouvrement ouvert de M (puisque $M = \cup W_n$), clairement plus fin que (V_α).

Le recouvrement $\left(\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N},(x,\alpha)\in I_n}$ est de plus localement fini. En effet, puisque pour $(x,\alpha) \in I_n$, $\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap K_{n-2} = \tau(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap^c \overset{\circ}{K}_{n+1} = \emptyset$, $\tau(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap W_m = \emptyset$ dès que $|n-m| > 1$. Autrement dit, si $\rho(x,\alpha)U_{x,\alpha} \cap W_n \neq \emptyset$, alors $(x,\alpha) \in I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$, qui est un ensemble fini. $\square$

2 Preuve du théorème 1

Le lemme 3 garantit qu'il existe un ensemble $X \subset M$ et un recouvrement $\left(\frac{1}{2}\tau(x)U_x\right)_{x\in X}$, tel que $\left(\tau(x)U_x\right)_{x\in X}$ est localement fini. La fonction $\rho_\tau := \rho(\cdot/\tau)$ est à support compact dans $B(\tau)$ et vaut 1 sur $B(\frac{\tau}{2})$. Pour $x \in X$, définissons $\chi_x : M \to [0,1]$ par $\chi_x(p) = \rho_{\tau(x)} \circ \varphi_x(p)$ si $p \in U_x$, 0 sinon. La fonction χ_x est $\mathcal{C}^\infty$, a support dans $\tau(x)U_x$ et vaut 1 sur $\frac{1}{2}\tau(x)U_x$. La fonction

$$\chi(p) := \sum_{x\in X} \chi_x(p)$$

est donc bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ (car $\tau(x)U_x$ étant localement finie, seul un nombre fini de terme de cette somme sont non nuls au voisinage d'un point donné). Elle est de plus à valeur dans $[1,+\infty)$ puisque tout point $p \in M$ appartient à un $\frac{1}{2}\tau(x)U_x$. On définit alors :

$$\rho_x := \frac{\chi_x}{\chi}.$$

On vérifie instantanément que ces ρ_x définissent une partition subordonnée au recouvrement $\frac{1}{2}\tau(x)U_x$, qui est plus fin que (O_α).

Il reste à en déduire une partition de l'unité subordonnée à (O_α). Pour cela, pour tout $x \in X$, choisissons $\alpha(x)$ tel que $\frac{1}{2}\tau(x)U_x \subset O_{\alpha(x)}$ et posons

$$\rho_\alpha := \sum_{\alpha(x)=\alpha} \rho_x.$$

Cette collection de fonction est une partition subordonnée à O_α. $\square$