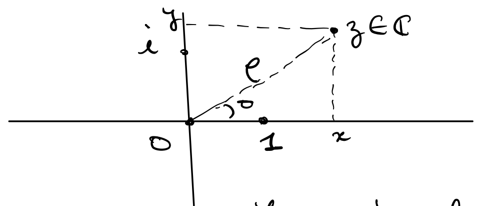
Nombres complexes

1 _ Opérations : L'ensemble des nombres complexes est un "ensemble" d'éléments, sur lesquels on peut faire certaines opérations. Cet ensemble peut-être vu principalement de 2 - 3 façons, et chacune est utile pour expliquer une opération.

Représentation n° 1 : $\mathbb{C} = \{$ points du plan $\}$



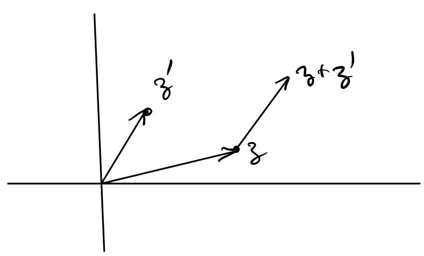
↳ représentation affine : $z = x + iy$ si z représente le point (x, y)

↳ représentation exponentielle : $\rho e^{i\theta}$ (coordonnées polaires)

Lien entre les deux écritures (affines / exponentielles ou cartésienne / polaire) :

- $\rho e^{i\theta} = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
- $x + iy$ donné : $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (bien défini à +/- près) et $\mathrm{sgn}(\sin\theta) = \mathrm{sgn}\, y$

Représentation n° 2 : $\mathbb{C} \simeq \{$ vecteurs du plan $\}$



↳ représentation affine et exponentielle toujours claires

↳ Addition de nombres complexes : = addition des vecteurs.

$\Longrightarrow$ $z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$

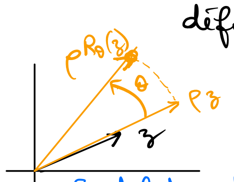
Remarque : l'addition des vecteurs est beaucoup moins facile à écrire en coordonnées polaires : il n'est pas évident de trouver le module et l'argument de $z + z'$ à partir des modules et arguments de z et de z'.

Donc : on ne sait pas ajouter des nombres $\mathbb{C}$ sous forme trigonométrique :

$$\rho e^{i\theta} + \rho' e^{i\theta'} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) + \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= \rho\cos\theta + \rho'\cos\theta' + i(\rho\sin\theta + \rho'\sin\theta')$$

On doit passer par la forme cartésienne.

Représentation n°3 : Un nombre complexe représente une similitude directe vectorielle : $\rho e^{i\theta} \longleftrightarrow \rho R_\theta$. Ceci permet de définir un produit :



- $\rho e^{i\theta} \cdot z$ = affixe de $\rho R_\theta(z)$
- ou $\rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'}$ = composition des similitudes associées $= \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

[dilater de ρ, tourner de θ, dilater de ρ', tourner de θ', c'est pareil que dilater de $\rho\rho'$ et tourner de $\theta+\theta'$]

Remarque : si $z = \rho e^{i\theta}$, $\frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \cdot z = \frac{1}{\rho} R(-\theta) \cdot \rho e^{i\theta} = 1 \to \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$.

Prop : $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y)$.

Preuve : posons $\begin{cases} x+iy = \rho e^{i\theta} \\ x'+iy' = \rho' e^{i\theta'} \end{cases}$ donc $x = \rho\cos\theta + i\sin\theta', \ldots$

Alors $(x+iy)(x'+iy') = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

$$= \rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta))$$
$$= \rho\cos\theta\,\rho'\cos\theta' - \rho\sin\theta\,\rho'\sin\theta' + i(\rho\cos\theta\,\rho'\sin\theta' + \ldots)$$
$$= xx' - yy' + i(xy' + x'y). \quad \square$$

Théorème (bilan) : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est l'ensemble des points du plan, munis d'opérations, qui vérifient :
- $(z+z')\cdot w = zw + z'w$
- $zz' = z'z$, $1/z = \rho^{-1} e^{-i\theta}$.
- $z + z' = z' + z$

Selon les différentes formes, ces opérations s'écrivent :
- $(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$
- $\rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
- $(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy'+x'y)$

Exercices : 1, 3, 4, 5

2 - Quelques calculs :

- **Norme** : Norme de z = longueur du vecteur associé :

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{si } z = x+iy$$
$$= \rho \quad \text{si } z = \rho e^{i\theta}$$

Remarque : $|z|^2 = z\bar{z}$ car $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$
$= x^2+y^2 + i.0 = |z|^2$.

- **Conjugué** : le conjugué de z, noté $\bar{z}$ est :

$$\begin{cases} x-iy & \text{si } z = x+iy \\ \rho e^{-i\theta} & \text{si } z = \rho e^{i\theta}. \end{cases}$$

- **Inverse** : On a vu : $(\rho e^{i\theta})^{-1} = \dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

Question $\dfrac{1}{x+iy} = ?$ [Rappel : on ne sait pas toujours trouver les formes trigonométriques]

Solution : on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Exos : 2

- **Racine** : On appelle racine carrée de z un nombre complexe dont le carré vaut z.

Exemple : $i^2 = i.i = R_{\pi/2} \circ R_{\pi/2} = R_\pi = -1$
$= (0+1i)(0+1.i) = 0 - 1 + i(0+0) = -1$

Rappel : si $t \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ soit $t \geq 0$ et $\sqrt{t}$ est bien défini, $\sqrt{t} \geq 0$ et $(\sqrt{t})^2 = t$ ($\triangle$ $(-\sqrt{t})^2 = t$
donc t a deux racines carrées : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
$\longrightarrow$ soit $t<0$ et $\sqrt{t}$ n'est pas défini. Mais $\sqrt{-t}$ oui. et $(i\sqrt{-t})^2 = i^2(\sqrt{-t})^2 = -1 \times -t = t$
$(-i\sqrt{-t})^2 = i^2(\sqrt{-t})^2 = t$.
Donc $t<0$ a deux racines complexes, imaginaires pures.

Théorème : Tout nombre complexe a deux racines complexes.
si $z = \rho e^{i\theta}$, les racines de z sont $\pm\sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$
si $z = x+iy$, les racines de z sont $\pm(x'+iy')$ avec :

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ x'^2 - y'^2 = x \\ 2xy = y \end{cases}$$

Preuve : • $(\pm\sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2})^2 = 1.\sqrt{\rho}^2 (e^{i\theta/2})^2 = \rho e^{i\theta}$

• Si $x'+iy'$ est une racine de $x+iy$, on a :

$(x'+iy')^2 = x+iy \rightarrow x'^2 - y'^2 + 2x'y'i = x+iy$
donc $x'^2 - y'^2 = x$
$2x'y' = y$

De plus, $|x'+iy'|^2 = |x+iy|$ donc $x'^2+y'^2 = \sqrt{x^2+y^2}$. $\square$.

En pratique : avec les deux premières équations on calcule facilement x'^2 et y'^2. Mais cela donne 4 possibilités avec les signes. La 3° équation permet d'écarter 2 possibilités. Ce sont les 2 racines.

Exemples : On cherche les racines carrées de $1+i$:
• Possibilité 1 : soit $x+iy$ une racine carrée de $1+i$. Alors
$1+i = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ donc $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=1 \end{cases}$
et $|x+iy|^2 = |1+i|$ donc $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{2} & ① \\ x^2-y^2=1 & ② \\ 2xy=1 & ③ \end{cases}$$

On utilise ① et ② : $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Donc $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$
$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

Donc $x+iy = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ 4 possibilités

Mais on sait que $2xy=1$ donc si $x>0$, $y>0$
si $x<0$, $y<0$.

Il reste donc 2 racines : $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ $\square$

• Possibilité 2 : Astuce, qui ne marche pas à tous les coups :

$1+i = \sqrt{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Donc les racines de $1+i$ sont $\pm\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8}$.

• Remarque : permet de calculer $\cos\frac{\pi}{8}$:

$\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{22}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercices : 6

3. Applications en trigonométrie :

- On a vu que le calcul de racines permet de calculer les $\cos \alpha/2$ quand on connaît $\cos\alpha$

- Plus généralement, on peut trouver $\cos kx$ en fonction de $\cos x$...

ex : $$\cos 3x = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{2} - \frac{3(e^{ix}+e^{-ix})}{2}$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

- On peut aussi linéariser les expressions trigonométriques de façon systématique avec les nbres $\mathbb{C}$:

ex : $$\cos^3 x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{32}\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\right)$$
$$= -\frac{1}{32}\left(e^{i5x}+e^{ix}-2e^{i3x}+3e^{i3x}+3e^{-ix}-6e^{ix}+3e^{ix}+3e^{-i3x}-6e^{-ix}+e^{-ix}+e^{-i5x}-2e^{-i3x}\right)$$
$$= -\frac{1}{32}\left(e^{i5x}+e^{-i5x}+e^{i3x}+e^{-i3x}+e^{ix}+e^{-ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+\cos 3x+\cos x\right)$$

Exercice : 12, 13

3. Polynomes :

$P(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Def : Une racine d'un polynome est un nombre $\mathbb{C}$ z tel que $P(z)=0$.

a) de degré 2 : az^2+bz+c

Theoreme : tout polynome de degré 2 sur $\mathbb{C}$ a exactement deux racines.

Exemple : z^2+a_0 a 2 racines : les 2 racines carrées de $-a_0$.

Preuve du thm (calcul des racines) :

$$P(z) = az^2+bz+c = a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

On pose $\Delta := b^2-4ac$, r une racine carrée de Δ.

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{r^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{r}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{r}{2a}\right)$$

$$= a\left(z+\frac{b-r}{2a}\right)\left(z+\frac{b+r}{2a}\right)$$

Donc $P(z)=0 \iff z = -\dfrac{b\pm r}{2a}$ donne deux solutions. $\square$.

Exercices 7, 8.2

b) de degré n :

Théorème : Tout polynome de degré n sur $\mathbb{C}$ a exactement n racines comptées avec multiplicité. Il s'écrit :
$a_n(x-z_1)^{\alpha_1}\dots(x-z_k)^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1+\dots+\alpha_k = n$.

Remarque : il n'est en general pas possible d'obtenir de formule pour les racines d'un polynome de degré n.
Mais on a des techniques numériques qui fonctionnent bien.

c) Division euclidienne :

On peut diviser des polynomes entre eux. On le fait sur des exemples :

$$\begin{array}{r|l} X^2+3 & X-1 \\ -(X^2-X) & X+1 \\ \hline X+3 & \\ -(X-1) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Donc $X^2+3 = (X-1)(X+1)+4$.

exercices 9, 11.

Théorème : si degré de $P \geq$ degré de Q, on peut écrire $P = QS + R$ où S est le quotient de la division de P par Q
et R est le reste ; $\deg R < \deg Q$.

Exemple important : $a \in \mathbb{C}$. On divise P par $X-a$.
On obtient $\deg R = 0$ donc R est une constante.
Donc $P = (X-a)S + \text{cte}$
Alors $P(a) = 0 + \text{cte}$ donc $\text{cte} = P(a)$.
Donc $P = (X-a)S + P(a)$.

Conséquence : si $P(a)=0$, $P = (X-a)S$ où $\deg S = \deg P - 1$.
En particulier, si on connait une racine d'1 polynome de degré 3, on peut connaitre toutes ses racines.

4 - Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples.

Def : Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynomes : $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Notre problème : déterminer une forme la plus smple possible d'une fraction rationelle.

En faisant la division euclidienne de P par Q, on peut écrire $P = QS + R$ avec $\deg R < \deg Q$
et alors

$$F = \frac{QS+R}{Q} = S + \frac{R}{Q} \qquad S \text{ polynôme.} \quad d^\circ R < d^\circ Q.$$

Il reste donc à trouver une forme smple de $\dfrac{R}{Q}$.
On peut aussi supposer que Q est unitaire (càd $Q = X^m + \cdots$) en incorporant le coefficient dominant de Q dans R.

Théorème (décomposition en éléments simples) :

Si $Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \cdots (X-a_k)^{\alpha_k}$ avec $a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_k$. Alors il existe des constantes $\beta_1^1, \ldots, \beta_1^{\alpha_1}, \beta_2^1, \ldots, \beta_2^{\alpha_2}, \ldots$ telles que

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q} = S + \frac{\beta_1^1}{X-a_1} + \frac{\beta_1^2}{(X-a_1)^2} + \cdots + \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{\beta_2^1}{X-a_2} + \frac{\beta_2^2}{(X-a_2)^2} + \cdots + \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{(X-a_2)^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{\beta_k^1}{X-a_k} + \frac{\beta_k^2}{(X-a_k)^2} + \cdots + \frac{\beta_k^{\alpha_k}}{(X-a_k)^{\alpha_k}}$$

Pb : On sait calculer S. Mais comment calculer les constantes β_i^j ?

Réponse : dans le cas où $Q = (X-a_1)\cdots(X-a_k)$, càd $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$, ce qui est le plus courant c'est facile : La formule donne $\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$ et $\frac{R}{Q} = \frac{\beta_1}{X-a_1} + \cdots + \frac{\beta_k}{X-a_k}$.

Alors $$\frac{R}{(X-a_1)\cdots(X-a_k)} = \frac{\beta_1}{X-a_1} + \cdots + \frac{\beta_k}{X-a_k}$$

$\times (X-a_1)$

$$\frac{R}{(X-a_2)\cdots(X-a_k)} = \beta_1 + \beta_2\frac{X-a_1}{X-a_2} + \cdots + \beta_k\frac{X-a_1}{X-a_k}.$$

On évalue en a_1 : $$\frac{R(a_1)}{(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_k)} = \beta_1 + 0 + \cdots + 0.$$

donc on connaît β_1. On fait pareil pour $\beta_2, \ldots$.

5. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle réelle

On suppose $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, càd ont des coefficients réels. On cherche à simplifier P/Q.

- → si Q a toutes ses racines réelles, le thm du dessus reste valable, et les β_i sont réels.
- → Si Q a des racines complexes, celles-ci vont par paire de racines conjuguées, avec la m̃ multiplicité. $k = p + 2m$

$$Q = \underbrace{(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}}_{\in \mathbb{R}}\,\underbrace{(X-b_1)^{\alpha_1'}(X-\overline{b_1})^{\alpha_1'}\cdots(X-b_m)^{\alpha_m'}(X-\overline{b_m})^{\alpha_m'}}_{b_1,\ldots,b_m \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$$

De plus, $(X-b_1)(X-\overline{b_1})$ est un polynôme du second degré de discriminant négatif.
En appliquant le théorème précédent et en regroupant les termes conjugués, on obtient une décomposition réelle.

Exemple : $\dfrac{x+2}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{x+2}{(x-i)(x+i)(x-1)} = \dfrac{\beta_1}{x-i} + \dfrac{\beta_2}{x+i} + \dfrac{\beta_3}{x-1}$

$\times (x-1)$: $\dfrac{x+2}{(x-i)(x+i)} = \beta_3 + (\cdots\ )(x-1)$

on evalue en 1 : $\dfrac{3}{2} = \beta_3$

$\times (x-i)$: $\dfrac{x+2}{(x+i)(x-1)} = \beta_1 + (\quad) \times (x-i)$

on evalue en i : $\dfrac{i+2}{2i(i-1)} = \beta_1$

On simplifie : $\beta_1 = -\dfrac{i(i+2)}{2(i-1)} = -\dfrac{i(i+2)(-1-i)}{2(-1+i)(-1-i)}$

$= + \dfrac{i(i+2)(i+1)}{4}$

$\longrightarrow \beta_1 = \dfrac{(-1+2i)(i+1)}{4} = \dfrac{-3+i}{4}$

On sait que $\beta_2 = \overline{\beta_1} = \dfrac{-3-i}{4}$. Mais vérifions :

$\times (x+i)$: $\dfrac{x+2}{(x-i)(x-1)} = \beta_2 + (\quad)(x+i)$

on evalue en $-i$: $\beta_2 = \dfrac{-i+2}{-2i(-i-1)} = \overline{\beta_1}$.

Donc $\dfrac{x+2}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{-3+i}{4(x-i)} + \dfrac{-3-i}{4(x+i)} + \dfrac{3}{2(x-1)}$

L on regroupe $= \dfrac{(-3+i)(x+i) - (3+i)(x-i)}{4(x-i)(x+i)} + \dfrac{3}{2(x-1)}$

$= \dfrac{-3x \cancel{-3i} + \cancel{ix} - 1 - 3x \cancel{+3i} - \cancel{ix} - 1}{4(x^2+1)} + \dfrac{3}{2(x-1)}$

$= \dfrac{-6x-2}{4(x^2+1)} + \dfrac{3}{2(x-1)} = -\dfrac{3x+1}{4(x^2+1)} + \dfrac{3}{2(x-1)}$.

Theoreme : Si $Q = (X-a_1)\cdots(X-a_p)(X^2+b_1X+c_1)\cdots(X^2+b_nX+c_n)$

avec
- $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i \neq a_j$, $(b_i, c_i) \neq (b_j, c_j)$
- $\Delta(X^2+b_iX+c_i) < 0$

et si $\deg R < \deg Q$,

$$\frac{R}{Q} = \frac{\alpha_1}{X-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_p}{X-a_p} + \frac{\beta_1 X + \gamma_1}{X^2+b_1X+c_1} + \cdots + \frac{\beta_m X + \gamma_m}{X^2+b_mX+c_m}$$

où les $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont tous des nombres réels

Application : Si on connait le racines de Q, on sait trouver des primitives des fractions rationnelles.

ex : $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{\alpha_1}{x+2} + \dfrac{\alpha_2}{x-3} = -\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+2} \longrightarrow \displaystyle\int \dfrac{dx}{(x+2)(x-3)} = -\ln(x+2)(x-3)$.

$\square$.