Université de Strasbourg
UFR de Mathématique et d'Informatique

Année 2021/2022

Mathématiques en filières Physique/Chimie/Plurisciences
Licence 1, semestre 1
Responsable : S. Beyrath-Deppner

Contrôle Continu numéro 3, mardi 11 janvier 2022
Durée : 2 heures

Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1

Soient a et b deux nombres réels.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \sin(\pi x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 0.

Exercice 2

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes les unes des autres.

1) a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\cos(x)$.

b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\sqrt{1-x^2}$.

c) En déduire la valeur de la limite en 0 de $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

2) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 du produit $\dfrac{1}{1-2x} \times \ln(1+2x)$.

3) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin(e^{3x} - 1)$.

Exercice 3

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes les unes des autres.

1) En utilisant une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-x} dx$.

2) En utilisant une double intégration par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$.

3) En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2} dx$.

Exercice 4

1) Résoudre l'équation différentielle (EH) : $y'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\, y(x)$.

2) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\, y(x) + 1$.

3) Trouver la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 2$.