Quelques références bibliographiques pour le cours de Mathématiques

Ci-dessous on trouvera la liste des points qui seront traités dans le cours de Mathématiques L1.

Le texte P. Guillot, Cours Concis de Mathématiques (téléchargéable librement en ligne) peut être utilisé comme guide pour la pluspart des contenus du cours, mais aussi d'autres références sont indiquées ci dessous. Nous invitons l'étudiant à consulter la littérature disponible dans la section "Mathématiques" de la bibliothèque de Sciences "Blaise Pascal" (2, Rue Blaise Pascal) et à choisir le livre qui mieux s'adapte à ses nécessités parmi les volumes disponibles.

1 Suites de nombres réels et limites

1. Définition d'une suite réelle, d'une suite convergente et de la limite de suite convergente ; définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), ([1], Chapitre 4, Définitions 4.1, 4.6, 4.13, 4.16).
2. Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de suites convergentes et critères de convergence : suites monotones et bornées, théorème des gendarmes, suites adjacentes. Sous-suites et critères de divergence par extraction de sous-suites ([1], Chapitre 4, Propositions 4.10, 4.14, 4.17, 4.16).
3. Parties de $\mathbb{R}$: maximum, supremum, minimum, infimum, adhérence. Intervalles, demi-droites et leur notation. ([9], III.5)

2 Fonctions réelles

1. Notion de fonction, image, domaine. Fonctions injectives, surjectives, bijectives. Fonction identité. Graphes de fonctions réelles ([1], Chapitre 1, Définitions 1.2, 1.6, 1.10,1.13, 1.18) ([6], Chapitre 1)
2. Fonctions polynômiales. Fonctions composées. Fonctions trigonométriques.

3. Fonction réciproque. Fonctions monotones. Une fonction monotone est injective. Réciproques des fonctions trigonométriques ([1], Chapitre 1, Proposition 1.14 et section suivante), ([16], Chapitre 3)

3 Fonctions continues et TVI

1. Limite en un point d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$: limite à gauche, limite à droite, limite. Notion de fonction continue en un point et de fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}$. ([1], Chapitre 6, Définitions 6.2, 6.15 et Proposition 6.16)

2. Continuité d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions continues ([1], Chapitre 6, Proposition 6.11 et 6.13 et Theorème 6.20).

3. Prolongement par continuité.

4. Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Weierstrass. ([1], Chapitre 6, Theorème 6.8, Proposition 8.3 et Corollaire 8.4), ([3], Chapitre 2)

4 Dérivation

1. Dérivabilité en un point et sur une partie de $\mathbb{R}$ d'une fonction d'une variable réelle à valeurs en $\mathbb{R}$. ([1], Chapitre 9, Définition 9.1 et Lemme 9.3).

2. La fonction dérivée. Dérivée de la somme, du produit, du quotient et de la composée de deux fonctions dérivables. Dérivée de la réciproque d'une fonction.([1], Chapitre 9, Proposition 9.5, 9.8, 9.10 et Théorème 9.21).

3. Exemples : dérivées des fonctions polynômiales et trigonométriques, dérivée de la fonction exponentielle, dérivée du logarithme.([1], Chapitre 9, Proposition 9.11).

4. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. ([1], Chapitre 9, Théorème 9.13, Corollaire 9.14).

5. Dérivées d'ordre supérieur, recherche des maxima, minima, étude du graphe d'une fonction, concavité et convexité du graphe.([9], IV.5)

6. Les formules de Taylor: Taylor-Young et Taylor-Lagrange. ([1], Chapitre 12, Théorèmes 12.4 et 12.1) ([11], 9.3), ([9], IV.6), ([16], Chapitre 10),([12], III.C)

7. Développements limités, leur unicité. Développement limité de la somme, du produit, du quotient et de la composée de deux fonctions. ([1], Chapitre 12, Définition 12.8, Proposition 12.11) ([9], IV.7, IV.8), ([3], Chapitre 4)

8. Application des développements limités : recherche de limites, recherche d'asymptotes. ([11], 9.5), ([5], Chapitre 7)

5 Intégration

1. Définition de l'intégrale. Toute fonction monotone ou continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est intégrable. ([1], Chapitre 14, Définition 14.5, Proposition 14.8, Théorème 14.15)

2. Intégrale de la somme, inégalité entre valeur absolue de l'intégrale et intégrale de la valeur absolue, relation de Chasles. ([1], Chapitre 14, Propositions 14.11, 14.13, 14.14)

3. Notion de primitive d'une fonction. Théorème fondamental de l'analyse. ([1], Chapitre 14, Théorème 14.20)

4. Exemple de recherche de primitives : fonctions polynômiales et trigonométriques, exponentielle.

5. Intégration par partie et par changement de variable. ([1], Chapitre 14, Proposition 14.24) ([11], 10.2, 10.3), ([14], 11.5-6), ([9], X.9-10),([7],Leçons 51 et 52), ([6], Chapitre XVII)

6. Intégration de fractions rationnelles : primitives des éléments simples.([1], Chapitre 15, section "Intégration des éléments simples") ([11], 10.5), ([7],Leçon 57), ([6], Chapitre XIX)

6 Équations différentielles

1. Définition d'une équation différentielle. Champs de vecteurs associés à une équation différentielle, étude qualititative d'une équation différentielle par son champs de vecteurs. ([1], Chapitre 17) ([8], Leçon 124)

2. Équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre. ([1], Chapitre 17, Proposition 17.2) ([8], Leçon 122)

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre. ([1], Chapitre 17, Proposition 17.6) ([11], 12.2), ([10], Chapitre 31), ([2], 4), ([3], Appendice), ([6], Chapitre XXI)

4. Équations diffrentielles à variables séparables. ([11], 12.3)

5. Le théorème de Cauchy-Lipschitz. ([8], Leçon 121)
6. Solutions maximales, dépendance des solutions à un paramètre.
7. Équations différentielles linéaires du second ordre (souhait).

References

[1] P. Guillot, Cours Concis de Mathématiques, disponible à l'adresse : www-irma.u-strasbg.fr/∼guillot/cours-concis.html

[2] Y. Allain, A. Dorange, J. Langlois, Mathématiques pour les sciences de la vie, **1. Analyse** 1^{er} *Cycle universitaire BTS-IUT*, Ref biblio Science: 51 MAT.

[3] F. Aribaud, J. Vauthier, Mathématiques, Première Anné du DEUG, Algèbre-Analyse, *Cours de l'Université Pierre et Marie Curie*, Ref biblio Science: 51 O 22 ARI.

[4] G. Choquet, Mathématiques, Cours de Gustave Choquet, *Ellipses*, Ref biblio Science: 51 022 CHO.

[5] L. Gacôgne, Algèbre et analyse, **Tome 1** *Eyrolles*, Ref biblio Science: 51 0 22 GAC.

[6] A. Hocquenghem, P.Jaffard, R. Chenon Mathématiques, **Tome 1** *Masson*, Ref biblio Science: 51 0 22 HOC.

[7] F. Liret, M. Zisman, Maths, **Tome 1** *Dunod Université*, Ref biblio Science: 51 LIR.

[8] F. Liret, M. Zisman, Maths, **Tome 5** *Dunod Université*, Ref biblio Science: 51 LIR.

[9] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, **2. Analyse** *Dunod*, Ref biblio Science: 51 022 LEL.

[10] J.P. Marco, L. Lazzarini, Mathématiques L1, **Cours complet avec** 1000 **tests et exercices corrigés** *Pearson education*, Ref biblio Science: 51 MAT.

[11] J.M. Monier, Cours de Mathématiques, **Math.Sup-Analyse 2** *Dunod*, Ref biblio Science: 51 MON.

[12] D. Guinin,F. Aubonnet, B. Joppin, Précis de Mathématiques,*Bréal*, Ref biblio Science: 51 023 GUI.

[13] D. Guinin, B. Joppin, Précis de Mathématiques,*Bréal*, Ref biblio Science: 51 023 GUI.

[14] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, E. Chikine Mathématiques Supérieures, *De Boeck Université*, Ref biblio Science: 51 MAT.

[15] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux Cours de Mathématiques spéciales, 1 algèbre,*Masson*, Ref biblio Science: 51 022 RAM.

[16] P. Thuiller, J.C. Belloc, Mathématiques, analyse 1, **Tome 1** *Instituts Universitaires de Technologue*, Ref biblio Science: 51 022 THU.

1. Suites de nombres réels et limites

1.1. Exercices sur les réels.

Exercice 1.1 (Intervalles I)**.** Décrivez les intervalles suivants. Sont-ils bornés ? minorés ? majorés ?

$$I_1 = [0,3]\,;\; I_2 = [1,\infty)\,;\; I_3 = (-1,2)\,;\; I_4 = (-2,1]\,;\; I_5 = (-\infty,1) \text{ et } I_6 = [2,4]\,.$$

Représentez ces intervalles sur l'axe des réels. Décrivez également leurs intersections $I_1 \cap I_2$; $I_1 \cap I_3$; etc.

Exercice 1.2 (Intervalles II)**.** Les inégalités suivantes décrivent des intervalles, explicitez-les :

$$0 \le x\,;\quad 9 < x < 12\,;\quad 3 < 4x \le 5\,;\quad 0 < 5x+2 \le 1\,;\quad 5 \le 7x-2 < 12\,;\quad 2x-1 < 5x+8\,.$$

Exercice 1.3 (Calcul d'inf et de de sup)**.** Déterminez les infinimums et les supremums des ensables suivants :

$$[-3,2)\,;\; (-\infty,\pi]\,;\; \{1/n,\, n \in \mathbb{N}^*\}\,;\; \{n+100/n,\, n\in\mathbb{N}^*\}\,;$$
$$\{1/n+1/m,\, n,m\in\mathbb{N}^*\} \text{ et } \left\{x \in \mathbf{R},\, x^3+2 < 2x^2+x\right\}\,.$$

Exercice 1.4 (Intervalles III)**.** Démontrez que les ensembles suivants sont des unions disjointes d'intervalles disjoints.

$$A = \{x \in \mathbf{R},\, x \neq 0\}\,;\quad B = \left\{x\in\mathbf{R},\, x^2 \ge 1\right\}\,;\quad C = \left\{x\in\mathbf{R},\, x^2-5x \ge 6\right\}\,;$$
$$D = \left\{x\in\mathbf{R},\, x^3+11x < 6x^2+6\right\}\,;\quad E = \left\{x\in\mathbf{R},\, -24 \le x^2-10x < 2x-20\right\}\,;\quad F = \{x\in\mathbf{R},\, \cos(x) > 0\}\,;$$
$$G = \{x\in\mathbf{R},\, -3 \le 2x+1/x < 3\}\,;\quad H = \{x\in\mathbf{R},\, 0 < \tan(x) \le 1\} \text{ et } J = \left\{x\in\mathbf{R}_+^*,\, \sin(1/x) < 0\right\}\,.$$

Exercice 1.5 (Max, min et valeur absolue)**.** Montrer que les identités suivantes sont vraies pour tout choix de x et y en $\mathbb{R}$:

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|\,;\qquad x = \max(x,0) + \min(x,0)\,;$$
$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}\,;\qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}\,.$$

1.2. Sur la convergence des suites.

Exercice 1.6 (Puissance)**.** Soit k un entier relatif. En fonction de k, calculez la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^k$. Étudiez également sa monotonie.

Exercice 1.7 (Monotonie)**.** Étudiez la monotonie des suites suivantes, indexées pour $n \ge 1$:

$$u_n = (-2)^n + {}^1\!/\!_n\,;\qquad v_n = ({}^1\!/\!_3)^n\,;\qquad w_n = 6n^2 - 11n + 6$$
$$x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,;\qquad y_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} u_n\,;\qquad z_n = n^3 - w_n\,.$$

Exercice 1.8 (Bornes)**.** Les suites suivantes, toujours indexées par $n \ge 1$, sont-elles bornées ? Pour chacune d'elles, donnez son infimum et son supremum.

$$u_n = (-1)^n\,;\quad v_n = n^5+n^2-3\,;\quad w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{5n}\,;\quad x_n = n^{(-1)^n}\,;\quad y_n = n + \frac{100}{n}\,;\quad z_n = \frac{3n+1}{2n+2}\,.$$

Exercice 1.9 (Monotonie, croissance, décroissance, suites bornées)**.** Pour chacune des suites suivantes, dites si elle est monotone, croissante, décroissante, bornée. Si elle est bornée dites si elle est bornée par le haut ou par le bas et donnez des constantes qui majeurent (resp. mineurent) la suite :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\,;\qquad v_n = 3 - \frac{1}{n^2}\,;\qquad w_n = n^2 - 10n + 1\,;$$
$$x_n = (-\frac{1}{2})^n(1+\frac{1}{n})\,;\qquad y_n = \cos(\frac{\pi}{n})\,;\qquad z_n = n\sin(\frac{\pi}{2}n)\,;$$
$$a_n = ||e^{2+i\pi\frac{5}{n^2}}||\,;\qquad b_n = 5^n - 2^n\,;\qquad c_n = c_{n-1} + c_{n-1}^2 \text{ avec } c_0 = 1\,;$$

Exercice 1.10 (Composition par un polynôme)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers l.

(1) Démontrez que, pour tout entier naturel k, la suite de terme général u_n^k converge vers l^k.

(2) Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels. Vérifiez que la suite de terme général $P(u_n)$ converge vers $P(l)$.

Exercice 1.11 (Théorème des gendarmes)**.** En utilisant le théorème des gendarmes, étudiez la convergence des suites numériques suivantes, toujours indexées par $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\,; \qquad v_n = \frac{\cos(n)}{n}\,; \qquad w_n = \sqrt[n]{4+1/n}\,;$$

$$x_n = (3^n + (-2)^n)\,; \qquad y_n = \frac{2+n}{3+n}\,; \qquad z_n = \frac{2+7n}{3+9n}\,;$$

$$a_n = \frac{5+\sin(n)}{3n}\,; \qquad b_n = \frac{n+2n\cos(n)}{n^2+\sin(2n)}\,; \qquad c_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}\,;$$

Exercice 1.12 (Limites I)**.** Étudiez la convergence des suites étudiées dans les exercices 1.7 et 1.8.

Exercice 1.13 (Limites II)**.** Étudiez la convergence des suites suivantes :

$$a_n = 10\sqrt{n} - n\,; \qquad b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,; \qquad c_n = \frac{2n^2-n}{2n-1}\,; \qquad d_n = \frac{2n^2-n}{(n-1)^2}\,;$$

$$f_n = \sqrt{n^2+9} - n\,; \qquad g_n = \sqrt[n]{7+5\cos(4n)}\,; \qquad h_n = \frac{n+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\,; \qquad j_n = \frac{5n^3+2n^2+1}{7n^3+n^2-n+8}\,.$$

Exercice 1.14 (Sous-suites)**.** Pour tout entier n, on pose $u_n = 0$ si n est premier, et $u_n = 1$ sinon. Exprimez en fonction de n la suite de terme général $1 - u_n^2$. Pour tout entier $k \geq 2$, quelle est la limite de (u_{kn}) ?

Exercice 1.15 (Questions en vrac)**.** Répondez aux questions suivantes.

(1) Est-il vrai qu'une suite d'entiers bornée prend un nombre fini de valeurs ?

(2) Si une suite d'entiers est convergente est-elle constante pour n assez grand ?

(3) Est-il vrai que toute suite d'entiers naturels distincts tend vers $+\infty$?

(4) Si une suite est convergente, est elle monotone à partir d'un n suffisamment grand ?

(5) Donnez un exemple d'une suite non monotone qui diverge vers $+\infty$.

(6) Une suite positive et non majorée peut-elle avoir une limite finie ?

Exercice 1.16 (Une démonstration)**.** Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers l et l'.

(1) Expliquez pourquoi $l \leq l'$.

(2) Démontrez que la suite v est bornée.

(3) Si $l = l'$, prouvez que la suite v converge. Quelle est la limite de v ?

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. Domaine de définition, image, graphe

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition et l'image de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Tracer son graphe.

Exercice 1.2. Donner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes :

$$\frac{x^3}{x^2-2x+1}, \ \frac{x^3}{x^2+1}, \ \frac{x^2-1}{x^3-x},$$

$$\log(\cos x), \quad \log|\cos x|, \quad e^{\sin x} + \sqrt{\tan x}, \quad \arctan\sqrt{x}.$$

Exercice 1.3. Résoudre graphiquement les inéquations $\frac{1}{x} < x$, $\sin x > \cos x$.

Exercice 1.4. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

(1) Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) Quelle est l'image $\mathcal{I}_f$ de f ?

(3) Décrire les ensembles X_i pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ définis comme suit :

$$X_i = \{y \in \mathcal{I}_f \text{ tels que l'équation } y = f(x) \text{ a exactement } i \text{ solutions.}\}$$

(4) Vérifier que $\mathcal{I}_f = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Montrer que pour une fonction polynômiale f de degré n, on a $\mathcal{I}_f = \bigcup_{i=1}^n X_i$.

Exercice 1.5. Même exercice pour la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Exercice 1.6. Tracer les graphes des fonctions suivantes :

$$(\sqrt{x})^2, \ \sqrt{x^2}, \ {}^3\sqrt{x^3}, \ ({}^3\sqrt{x})^3.$$

Exercice 1.7. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et A et B des ensembles de $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ et $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

(2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(5) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

2. Monotonie, injectivité, surjectivité, fonctions réciproques

Exercice 2.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(1) $f$croissante $\Leftrightarrow -f$ décroissante.
(2) f et g croissantes $\Rightarrow f+g$ et $f.g$ croissantes.
(3) f croissante $\Rightarrow \frac{1}{f}$ décroissante sur $\mathcal{D}_f$.
(4) f et g croissantes $\Rightarrow f\circ g$ croissante.
(5) f croissante, g décroissante $\Rightarrow f\circ g$ décroissante.
(6) f et g injectives $\Rightarrow f\circ g$ injective.

Exercice 2.2. Sur quels intervalles les fonctions des exercices 1.4 et 1.5 sont-elles injectives ?

Exercice 2.3. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et f_α définie sur $[-2,2]$ de la manière suivante :

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} -1-2x & \text{si } x\in[-2,-1] \\ \alpha x & \text{si } x\in]-1,1] \\ \frac{-1-x}{2} & \text{si } x\in]1,2] \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est décroissante, puis celles pour lesquelles f_α est injective. Tracer le graphe de f_{-1} et le graphe de sa fonction réciproque.

Exercice 2.4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante, telle que $f\circ f=Id_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f=Id_{\mathbb{R}}$.

3. Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 3.1. Tracer les graphes des fonctions suivantes :

$$\cos\circ\arccos,\ \arccos\circ\cos,\ \sin\circ\arcsin,\ \arcsin\circ\sin,\ \tan\circ\arctan,\ \arctan\circ\tan.$$

Exercice 3.2. On rappelle les formules :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,\quad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a.$$

(1) Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$.
(2) En déduire une expression de $\arctan a+\arctan b$.
(3) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Discuter, en fonction α, le nombre de solutions de l'équation :

$$\arctan(x)+\arctan(1-x)=\alpha.$$

Exercice 3.3. Résoudre les équations :

$$\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{3}{2}=0,\quad \sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x=0$$

$$\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{6}-1}{4}=0,\quad \sin x-\tan x-\cos x+1=0.$$

1. Limites, fonctions continues et TVI

1.1. Exercices sur les limites.

Exercice 1.1. Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}\cos(\pi x)$

(3) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$

(5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a+x}{1-ax}-\sqrt{x}\right)$, $\quad a\in \mathbb{R}$.

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(ax+\sqrt{x^2+1}\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.2. Calculer les limites en $+\infty$ (et en $-\infty$ si c'est possible) des fonctions suivantes :

$$\frac{\sqrt{2x^3+1}}{x^2+2}, \sqrt{x}+\sin(x), \sqrt{x}-x, \exp(\sqrt{x}-x), 2\ln(x+1)-\ln(x^2+1),$$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}, \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}, \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}, \tan\left(\frac{(\pi+x)(1-\pi x)}{(1-2x)^2}\right)$$

1.2. Exercices sur les fonctions continues.

Exercice 1.3. Trouvez les images des fonctions suivantes :

a) $[0,1[\to \mathbb{R}, \quad x\mapsto \cos(x)$

b) $]-2,1]\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto x^2-4x+3$

c) $\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto E(x)$ (où $E(x)$ est la partie entière de x)

Exercice 1.4. On considère les fonctions $f(x)=x^2-6x+8$ et $g(x)=|\, x^2-6x+8\,|$.

a) Déterminer l'image de l'intervalle $]3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}[$ par f et par g.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $[0,5]$ par f et par g.

Exercice 1.5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)\begin{cases} \ln(x^2-x-1), & \text{si } x<-1 \\ \exp(x^2-1) & \text{si } x\in[-1,1] \\ x^2-x+1, & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Trouvez tous les points de discontinuité de f (s'il y en a).

Exercice 1.6. Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par

$$f(x)\begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \text{si x} \geq \pi \\ \exp(x) - k\sin(x), & \text{si x} < \pi. \end{cases}$$

Déterminer k de sorte que f soit continue en π.

Exercice 1.7. Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par

$$f(x)\begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si x} \geq 2 \\ x^2 + kx + 1, & \text{si x} < 2. \end{cases}$$

Déterminer k de sorte que f soit continue en 2.

Exercice 1.8. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ d'inconnue $x \geq 0$ admet au moins une solution dans $I\!R$.

Exercice 1.9. Montrer qu'une fonction polynômiale de degré impair admet au moins un zéro dans $I\!R$.

Exercice 1.10. Soient $f, g : [0,1] \to I\!R$ deux fonctions continues telles que $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0,\ \forall x \in [0,1]$. Montrer que f et g sont de signe constant sur $[0,1]$ et $f = g$ ou bien $f = -g$.

Exercice 1.11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^2+x+1}$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.

Exercice 1.12. Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(1) Montrer que f est une bijection.

(2) Déterminer l'intervalle $I = f(I\!R)$ et montrer que la bijection réciproque de f est donnée par $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

Exercice 1.13. Soient $f : [0,+\infty[\to I\!R,\quad x \mapsto \ln(x+2)$ et soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.

(1) Calculer $g(e-2)$ et $g(e^2-2)$.

(2) En déduire qu'il existe une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 1.14. Montrer qu'une fonction polynômiale de degré pair admet soit un minimum soit un maximum sur $I\!R$. Est-ce que le même est vrai pour les fonctions polynômiales de degré impair ?

Exercice 1.15. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
On considère la fonction $g : [0,1] \to I\!R$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

(1) Déterminer le signe de $g(0)$ et de $g(1)$.

(2) En déduire qu'il existe au moins un réel $c \in [0,1]$ vérifiant $f(c) = c$.

(3) Interpréter graphiquement.

Exercice 1.16. Montrer que l'équation $x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $I\!R$.

Exercices sur la Dérivation

Exercice 1. Quelle est la valeur de $\lim_{h\to 0} \dfrac{(7+h)^2-49}{h}$?

a) 7 b) 49 c) 14 d) h e) 0

Exercice 2. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-1}{h}$ est le nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0. Retrouver f et x_0.

a) $f(x)=\cos(x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ b) $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$, $x_0=0$
c) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ d) $f(x)=\sin(x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$
e) $f(x)=-\sin(x)$, $x_0=-\frac{\pi}{2}$

Exercice 3. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{343+h}-7}{h}$ est le nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0. Retrouver f et x_0.

a) $f(x)=\sqrt[3]{4+x}$, $x_0=338$ b) $f(x)=\sqrt[3]{348+x}$, $x_0=0$
c) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=343$ d) $f(x)=\sqrt[3]{337+x}$, $x_0=\sqrt{6}$
e) $f(x)=\sqrt[3]{4+x}$, $x_0=\sqrt{6}$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$$

Exercice 5. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\frac{4-5x}{1-x^2},\quad f_2(x)=\frac{x+2}{x-8},\quad f_3(x)=\frac{\tan(x)-2}{\sin(x)},$$

$$f_4(x)=\sqrt{1+x^2\sin(x)},\quad f_5(x)=\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right).$$

Exercice 6. Quelle est la valeur de la dérivée de $f(x)=9\sin(\sin(x))$ au point π ?

a) 1 b) -9 c) 9 d) -1 e) 0

Exercice 7. Quel est le nombre dérivé de la fonction $f(x)=\sin(\sin(3x))$ au point π ?

a) 3 b) 0 c) 1 d) -1 e) -3

Exercice 8. Calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x)=\sqrt{8x^2+(x^2+1)^3}$ au point 1.

a) 5 b) -5 c) 10 d) -10 e) $\frac{7}{2}$

Exercice 9. Soient f et g des fonctions telles que $f(-3)=-3$, $f'(-3)=4$, $g(-3)=5$, $g'(-3)=-4$. Calculer $(fg)'(-3)$.

Exercice 10. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3+2x^2+3x+1$ et soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction réciproque de f. La valeur de $g'(7)$ est :

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{7}$ c) 1 d) 0 e) $\frac{1}{178}$

Exercice 11. Les valeurs des constantes m et a telles que la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & \text{si} \quad x<\pi\\ mx+a & \text{si} \quad x\geq\pi\end{cases}$$

soit dérivable en $x=\pi$ sont :

a) $m=1$ et $a=0$; b) $m=0$ et $a=\pi$; c) $m=\pi$ et $a=1$; d) $m=-1$ et $a=\pi$.

Exercice 12. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=x^8\cos(x)$ au point $(\pi,-\pi^8)$.

Exercice 13. On considère f_1 et f_2 les fonctions de $I\!R$ dans $I\!R$ définies par : $f_1(x) = x^2 - 2x$ et $f_2(x) = -x^2 + 1$. On note C_1 et C_2 leurs graphes. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la tangente à C_1 en $(2, 0)$ avec la tangente à C_2 en $(1, 0)$?

a) $(\frac{1}{2}, -2)$ b) $(1, 0)$ c) $(-2, \frac{1}{2})$ d) $(0, 1)$ e) $(\frac{3}{2}, -1)$

Exercice 14. Démontrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition. Sont-elles dérivables ?

a) $f : I\!R \to I\!R, \quad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$

b) $f : I\!R \to I\!R, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$

c) $f :]-1, 1[\to I\!R, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$

Exercice 15. Soit $f : I\!R \to I\!R$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $I\!R$ et que sa dérivée est continue.

Exercice 16. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(e^{\cos(x)}),\ f_2(x) = \ln(e^x + 1),\ f_3(x) = \sqrt{2 + \cos(x^2)},\ f_4(x) = \sqrt[5]{e^x + 1}$$

Exercice 17. Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x), \quad f_4(x) = x^k (k \in I\!N),$

$f_5(x) = \dfrac{1}{x+3}, \quad f_6(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

(pour f_6, on déterminera d'abord les nombres réels a et b tels que $f_6(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$).

Exercice 18. Soit $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. Donner le domaine de définition, la dérivée, le tableau de variation, la représentation graphique de f.

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}\ln(x) - x + 2$.

a) Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $[0, +\infty[$, noté g. Est-ce que g est dérivable en 0 ?

b) Etudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de $h(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$.

c) Etudier les variations de la fonction g et tracer son graphe.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0.

Exercice 20. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2 - 4}$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Décomposer f en éléments simples.

c) Déterminer les limites de f, son tableau de variation, ses asymptotes.

d) Représenter f.

Exercice 21. Soit f la fonction définie par $f(x) = (\sin(x))^2 \cos(2x)$.

a) Etudier la parité et la périodicité de f sur son domaine de définition.

b) Calculer sa dérivée, donner son tableau de variation, représenter f.

Exercice 22. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$.

a) Etudier la parité et la périodicité de f sur son domaine de définition.

b) Calculer sa dérivée, donner son tableau de variation, représenter f.

Exercice 23. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1 + 2\sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

a) Etudier la parité et la périodicité de f sur son domaine de définition.

b) Calculer sa dérivée, donner son tableau de variation, représenter f.

1. Exercices sur les DL

Exercice 1.1. Nous indiquons $DL_n(x_0)$ *de* $f(x)$ le développement limité de f en x_0 à l'ordre n. Appliquer la formule de Taylor-Young pour calculer les DL suivants :

(1) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \sin(3x) + \cos(x)$
(2) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \exp(x) + \ln(1 + x^2)$
(3) $DL_2(0)$ *de* $f(x) = 2x \exp(x)$
(4) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \exp(x^2)$
(5) $DL_2(0)$ *de* $f(x) = \exp(\cos(x))$
(6) $DL_2(1)$ *de* $f(x) = \exp(x^2 - 1)$
(7) $DL_2(5)$ *de* $f(x) = \ln(x)$

Exercice 1.2. Appliquer la formule de Taylor-Young ainsi que les méthodes de calcul des DL de la somme, produit et composition de deux fonctions pour calculer les DL suivants :

(1) Donner le $DL_6(0)$ de $(e^x - 1)(\sin(x) - x)$.
(2) Donner le $DL_5(0)$ de $\sin(x)\ln(1 + x)$.
(3) Donner le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1 + x}$.
(4) Donner le $DL_6(0)$ de $\sqrt{1 - x^2}$.
(5) Donner le $DL_4(0)$ de $\sqrt[3]{1 + x}$.
(6) Donner le $DL_6(0)$ de $\sqrt[3]{1 + (2x)^3}$.
(7) Donner le $DL_3(0)$ de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
(8) Donner le $DL_5(0)$ de $e^{\frac{\sin(x)}{x}}$.

Exercice 1.3. (1) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\frac{\sin(x)}{x}$.
(2) En déduire le $DL_4(0)$ de $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$.
(3) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{x^4}$.

Exercice 1.4. Soit $f(x) = (\cos(x))^2$ et $g(x) = e^{-\sin(x^2)}$.

(1) Déterminer les $DL_4(0)$ de f et de g.
(2) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^4}$.

Exercice 1.5. Trouver la limite des expressions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{1 - x^2} - 1}, \quad \frac{1 - (\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3}, \quad \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} - \sqrt{2}}{x^2}, \quad \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}.$$

Exercice 1.6. En utilisant les propriétés des DL, calculer les DL suivants :

(1) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \exp\big(x^2 \sin(x)\big)$
(2) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \sin\big(3\sin(x)\big)$
(3) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \big(\exp(x) - x\big)^{-1}$
(4) $DL_2(0)$ *de* $f(x) = \frac{x}{\exp(x)-1}$
(5) $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}$
(6) $DL_4(0)$ *de* $f(x) = \frac{3x+2}{1-3x^2}$

Exercice 1.7. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange calculez les nombres suivants avec une approximation plus petite que 10^{-3} : *a)* $\cos(1)$, *b)* $\sin(1)$, *c)* $\ln(2)$, *d)* e.

Exercice 1.8. Trouver les limites lorsque x tend vers $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\frac{e^{\frac{1}{2x}} - \cos(\frac{1}{x})}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}, \quad (\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3})^x, \ a > 0, b > 0, c > 0.$$

Exercice 1.9. En utilisant les DL, calculer les limites suivantes :

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(x^2 \sin(x)\right) - 1}{2x^3 + x^4}$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - \exp(x)}{\sin(x)}$$

(3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^3 \cos(x)) - 1}{\sin(x)(\cos(x) - 1)}$$

(4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{\sin(\alpha x)}, \ \alpha \in \mathbb{R}_+$$

(5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\exp(2x) - \cos(2x) + 2\sin(x)}$$

(6)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\ln(x^2 + 1))}{\exp(2x) - 1}$$

(7)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\cos x - 1}$$

(8)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{\ln(\sin(x) + 1)}$$

1. Intégration

Exercice 1.1. Trouver les primitives des fonctions suivantes :

$$3x^2 + 7x^{34}, \frac{1}{x+1}, \frac{2x}{x+1}, \frac{1}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1},$$
$$\sin(13x), \cos(\frac{x}{13}), e^{2x}, 2xe^{x^2}, \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 1.2. Sur l'intervalle $[0, 1[$, vérifier les résultats suivants :

$$\int \frac{4x+1}{(6x^2+3x+4)^2} dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{6x^2+3x+4} + Cte$$
$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + \frac{2x+1}{x^2+1} - \ln(x^2+1) + \arctan(x) + Cte$$
$$\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)} = \frac{1}{2}\arctan(2\tan(x)) + Cte$$

Exercice 1.3. Calculez les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 x^2 + \sin(x)dx, \ \int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+1}dx, \ \int_{-1}^0 \cos(x) + e^x dx$$

Exercice 1.4 (Intégration par parties)**.** Calculez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 xe^x dx, \ \int_0^1 x^2 e^x, \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx, \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{3x}dx, \int_0^{\pi} x\sin(x)dx$$
$$\int_2^4 \ln(x)dx, \int_1^2 x\ln(x)dx, \ \int_0^1 arctan(x)dx, \ \int_0^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \ (n, m \in \mathbb{N})$$

Exercice 1.5 (Intégration par changement de variable)**.** Calculez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \sin(x)e^{2\cos(x)}dx, \ \int_0^{\pi} \tan(x)dx, \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2x)}{1+\sin(2x)}dx$$
$$\int_0^9 e^{\sqrt{x}}dx, \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx, \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx, \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)^3}{1+\cos(x)}dx$$

Exercice 1.6 (Intégration de fonctions rationnelles)**.** Calculez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx, \ \int_0^1 \frac{x}{2x+1}, \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}, \ \int_0^1 \frac{1}{x^2+9}, \ \int_0^1 \frac{2x^3+1}{x^3+x}$$
$$\int_1^2 \frac{3+8x+3x^2}{2x+4x^2+x^3}dx, \ \int_0^1 \frac{12+4x+2x^2}{4+4x+x^2+x^3}dx$$

Exercice 1.7 (Dérivation d'intégrales)**.** Dérivez les fonctions suivantes :

$$F_1(x) = \int_0^x e^{t^2}dt, \ F_2(x) = \int_0^{x^2} \sin(t^2)dt, \ F_3(x) = \int_x^1 \cos((\sin t))dt, \ F_4(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{\sin(t)}dt$$

Exercice 1.8. Calculer l'aire de la partie du plan contenue au dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la parabole d'équation $y = x^2 - 3x - 4$.

Exercice 1.9. Calculer l'aire d'une ellipse dont les semiaxes ont longueurs respectives a et b.

Exercice 1.10 (Examen Juin 2010)**.** Calculer les intégrales suivantes :

(1)
$$\int_1^2 x\ ln(x^2)dx$$

(2)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2x)}{1+(cos(x))^2}dx$$

(aide : utilisez un changement de variable)

(3)
$$\int_5^6 \Big(\frac{4x-13}{x^2-7x+12}+\frac{2x+1}{x^2+1}\Big)dx$$

Exercice 1.11 (Examen Janvier 2010)**.** Calculer les intégrales suivantes :

(1)
$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$$

(2)
$$\int_0^2 x^3 sin(x^2)dx$$

(3)
$$\int_2^3 \frac{3x^2+x+1}{x^3+x}dx$$

Exercice 1.12 (Examen Juin 2012)**.** Calculer les intégrales suivantes et indiquer laquelle des trois valeurs est la plus grande :

(1)
$$\int_0^{10} \frac{-\exp(x)}{1+\exp(x)}dx$$

(2)
$$\int_2^7 \frac{x}{x^2-1}dx$$

(3)
$$\int_1^2 x(\ln(x))^2dx$$

(Aide : une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$)

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires.

(1) Tracer le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y'(t) = t$, puis résoudre cette équation différentielle.

(2) Tracer le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y'(t) = y(t)$, puis résoudre cette équation différentielle.

(3) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+t \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+t^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+15-17t+12t^2 \\ y(0) & = & 10 \end{array}\right.$$

(4) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}y(t), \qquad y'(t) = \frac{1}{t^3}y(t), \qquad y'(t) = \frac{1}{t}y(t),$$

puis les suivantes

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}y(t) + \frac{1}{t^2}, \qquad y'(t) = \frac{1}{t^3}y(t) + \frac{1}{t^5}, \qquad y'(t) = \frac{1}{t}y(t) + 3t^3.$$

(5) Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'(t) = \sin(t)y(t), \qquad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}, \qquad y'(t) = e^t y(t),$$

puis les suivantes

$$y'(t) = \sin(t)y(t)+\sin(t)^3, \qquad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}+\frac{e^{\arctan(t)}}{(t+1)(1+t^2)}, \qquad y'(t) = e^t y(t)+e^{3t}.$$

(6) Résoudre le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ccc} y'(t)+\frac{y(t)}{t\ln(t)} & = & \frac{1}{t} \\ y(e) & = & 3 \end{array}\right.$$

Équations différentielles autonomes et à variables séparables.

(1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = e^{y(t)}, \qquad y'(t) = 1+y^2(t), \qquad y'(t) = (t+t^2)e^{y(t)}.$$

(2) Quelles sont les primitives de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

(a) Quelle est l'unique primitive G de f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que l'on ait $G(1) = 1$? Tracer son graphe. Tracer le graphe de la fonction réciproque G^{-1}.

(b) Quelle est l'unique primitive H de f définie sur $\mathbb{R}_-^*$ telle que l'on ait $G(-1) = -1$? Tracer son graphe. Tracer le graphe de la fonction réciproque H^{-1}.

(c) Résoudre les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{1+y(t)^2} \\ y(2) &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{1+y(t)^2} \\ y(2) &= -1 \end{cases}$$

(3) On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y'(t) = \tan(y(t)).$$

(a) Tracer le champ de vecteurs associé à (E).

(b) Quelles sont les solutions de (E) ?

(c) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{\pi}{4}$.

(d) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = -\frac{\pi}{4}$.

(e) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{3\pi}{4}$.

(f) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = 0$.

(4) On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = \frac{1}{\sin(y(t))} \quad .$$

(a) Tracer le champ de vecteurs associé à (E).

(b) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$\cos(y(t)) = -t + C$$

pour toute constante C.

(c) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

(d) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{5\pi}{4}$.

(e) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(2) = \frac{11\pi}{4}$

(f) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(3) = -\frac{\pi}{4}$.

(5) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = \frac{1 + y^2(t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \qquad y'(t) = \frac{\sin(t)}{1 + y^2}.$$

Exemples d'applications aux sciences.

(1) Dans une culture de bactéries, le taux d'accroissement (nombre de naissances - nombre de morts) est proportionnel au nombre d'individus présents.

(a) Si l'on constate que le nombre de bactéries a doublé au bout d'une heure, que peut-on s'attendre à observer après 12 heures ?

(b) Si l'on constate que le nombre de bactéries est 10^4 au bout de 3 heures, et 4.10^4 au bout de 5 heures, combien y avait-il de bactéries initialement ?

(2) Une substance chimique A se dissout dans de l'eau. Au temps t l'accroissement de substance dissoute est proportionnel au produit de la quantité non encore dissoute par la différence entre la concentration de la solution lorsqu'elle est saturée et la concentration au temps t.

On sait que 100g d'une solution saturée contiennent 50g de la substance A, et que lorsque l'on plonge 30g de la substance A dans 100g d'eau, 10g sont dissous en 2 heures.

Quelle quantité sera dissoute au bout de 5 heures ?

(3) Un parachutiste saute d'un hélicoptère (supposé fixe) à une altitude de 1000m.

Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? (On utilisera la valeur $g = 9,8m.s^{-2}$, et l'on négligera la résistance de l'air). Quelle est alors son altitude ?

A ce moment, il ouvre son parachute. La résistance de l'air devient plus importante : la force exercée (vers le haut) par l'air est de $\frac{P}{25}v^2$, le poids total du parachutiste et de son équipement étant P. Calculer la vitesse du parachutiste en fonction du temps.

Au bout de combien de temps le parachutiste touche-t-il terre ?

Extraits de l'examen de Janvier 2010.

(1) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \sin(t)\cos(t)y(t) + te^{\frac{\sin(t)^2}{2}} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

(2) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{1+y(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

(3) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{t} + \ln(t) \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$