Université de Strasbourg
Algèbre S4

Année 2022-2023

# Algèbre S4 - CC1 - Printemps 2023

*Durée : 60 minutes*
*Aucun document n'est autorisé.*
*L'utilisation de tout moyen de communication est formellement interdit.*
*La plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.*

**Exercice 1.** On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + y_1x_2 - x_1y_3 - y_1x_3 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 + 9x_3y_3 \end{array}$$

1. Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire.
2. Écrire la matrice de $\Phi$ dans la base canonique.
3. Soit $u_1 = (0, 1, 1), u_2 = (-1, 0, 1), u_3 = (1, -1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice du produit scalaire $\Phi$ dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant la formule de changement de base.
   La base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormée pour le produit scalaire $\Phi$ ? Orthogonale ?
5. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire $\Phi$.

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P'(t)Q'(t)dt \end{array}$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On rappelle que $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que le polynôme $P = 1$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\,(X, X^2, \ldots, X^n)$.
4. On définit maintenant :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P'(t)Q'(t)dt \end{array}$$

   Est-ce que $\phi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ ? sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ ?

**Exercice 3.**
1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $2x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{7}{4}$.
3. Cette inégalité est-elle optimale ?