Algèbre S4 - CC2 - Printemps 2023

Durée : 60 minutes
Aucun document n'est autorisé.
L'utilisation de tout moyen de communication est formellement interdit.
La plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Dans tout le contrôle, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, on note q et $\| \cdot \|$ la forme quadratique et la norme associées au produit scalaire. Pour $F \subset E$, on note p_F la projection orthogonale sur F.

Exercice 1.

1. Rappeler la définition de $O(q)$.
2. Montrer que $O(q) \subset \mathrm{GL}(E)$.
3. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $u \in O(q)$ et $e'_i := u(e_i)$. Montrer que
$$\forall i, j, \quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle.$$
4. Soit $\mathcal{B} := (e_i), \mathcal{B}' := (e'_i)$ deux bases de E. Montrer qu'il existe $u \in O(q)$ telle que $u(e_i) = e'_i$ si et seulement si $\langle e'_i, e'_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ pour tout i, j (pour l'un des sens, une preuve en petite dimension sera déjà appréciée si vous ne trouvez pas une preuve générale).

Exercice 2. Soient F, G des sous-espaces de E. On définit
$$\alpha(F, G) := \max\{\langle x, y \rangle,\ x \in F,\ y \in G,\ \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

1. Montrer que pour $x \in F$ et $y \in G$, $\langle x, y \rangle = \langle p_G(x), y \rangle$
2. Montrer que pour $x \in F$ fixé,
$$\max\{\langle x, y \rangle,\ v \in G,\ \|x\| = 1\}$$
est atteint pour $y = \dfrac{p_G(x)}{\|p_G(x)\|}$.
3. Montrer que $0 \leq \alpha(F, G) \leq 1$. En déduire qu'il existe un réel $\theta(F, G) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\alpha(F, G) = \cos\theta(F, G)$. Que signifie $\theta(F, G) = 0$?

On suppose a présent donnés F, F', G, G' des sous-espaces de E avec $\dim F = \dim F'$ et $\dim G = \dim G'$.

4. On suppose dans un premier temps que $\dim F = 1$ et que $\dim G = n - 1$. Montrer qu'il existe $u \in O(q)$ tel que $u(F) = F'$ et $u(G) = G'$ si et seulement si $\alpha(F, G) = \alpha(F', G')$.
5. Montrer que le résultat précédent reste vrai lorsqu'on suppose seulement que $\dim F = 1$.
6. Trouver un contre-exemple au résultat précédent lorsque $\dim F = 2$ et $\dim G = 2$.

Exercice 3. Calculer la distance usuelle entre le point $(1, 2, 3)$ et le plan d'équation $x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.