Suites et séries de fonctions, TD 1 : convergences simple et uniforme.

Exercice 1 : Contre-exemples de la convergence simple.

1. Construire une suite de fonctions continues qui convergent simplement vers une fonction discontinue.
2. Construire une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers 0, et telle que

$$\int_0^1 f_n(t)dt = n.$$

Exercice 2 : convergences simple et uniforme. Montrer que les suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous convergent simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera. Etudier alors la convergence uniforme sur I.

1. $f_n(x) = x^n$ pour $I = [0,1]$, $I = [0,1)$ puis pour $I = [0,a]$, $a < 1$.
2. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ pour $I = [0,+\infty)$.
4. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ pour $I = \mathbb{R}$, puis pour $I = (0,+\infty)$ et enfin pour $I = [a,+\infty)$, avec $a > 0$. Les fonctions f_n et f sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?
5. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ pour $I = \mathbb{R}$. f_n et f sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$?
6. $f_n(x) = \displaystyle\int_0^n e^{-(1+x^2)t^2}dt$ pour $I = \mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ pour $I = [0,\infty)$, puis pour $I_a = [0,a]$, avec $a > 0$. En déduire la nature de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $u_n = \int_0^1 \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. $f_n(x) = n^2(\sin x)^n \cos x$ pour $I = [0,\frac{\pi}{2}]$, puis pour $I = [0,a]$, avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : Théorèmes de Dini Soit $(f_n) : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues, qui converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\forall n$, f_n est croissante et que f est continue. Montrer que f_n converge uniformément vers f.
2. On suppose que $\forall n$, $f_{n+1} \geq f_n$ et que f est continue. Montrer que f_n converge uniformément vers f.
3. Dans les deux questions précédentes, on conserve les hypothèses de croissance, mais on omet l'hypothèse de continuité de f. Que se passe-t'il alors ?
4. Que se passe-t'il si le domaine de définition est $(0,1)$.

Exercice 4 : On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } \ x \geq n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers e^{-x}.
2. Montrer que $\forall n$, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que (f_n) converge uniformément vers e^{-x} sur tout intervalle $[a, B]$, avec $a, B \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e^{-x} sur $[a, +\infty)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : convergence uniforme et intégrale impropre. Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si il existe une constante C telle que

$$\forall \varepsilon, \qquad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |f(t)|dt < C.$$

Soit $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ des fonctions continues intégrables sur (a, b). On suppose

i) que f_n converge uniformément vers $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sur tout compact de (a, b),

ii) et que $|f_n(t)| \leq g(t)$ où $g : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ est intégrable.

Montrer que f est intégrable et que

$$\int_a^b f_n(t)dt \longrightarrow \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 6 : un espace de dimension infinie pas complet Soit $\ell^1 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{R},\ |\ \sum |x_n| < +\infty\}$. Pour $x \in \ell^1$, on pose $N_1(x) := \sum |x_n|$ et $N_\infty(x) := \sup |x_n|$.

1. Montrer que ℓ^1 est un espace vectoriel de dimension infinie, et que N_1 et N_∞ sont deux normes sur ℓ^1.
2. Montrer que (ℓ^1, N_1) est complet.
3. Montrer que (ℓ^1, N_∞) n'est pas complet.