Suites et séries de fonctions, TD 2 : convergence uniforme II.

Exercice 1 : Soit $P_n(x) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

1. Montrer que P_n converge uniformément sur $[0,1]$ (Indication : série alternée).
2. En dérivant P_n, montrer que
$$P_n(x) = \ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt =: \ln(1+x) - (-1)^n R_n(x).$$
3. Pour $A < 1$, montrer que $R_n(A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Montrer que $R_n(1) - R_n(A) < 1 - A$. En déduire que $R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis que R_n converge uniformémement vers 0 sur $[0,1]$.
5. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P_n(1) = \ln 2$.
6. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Exercice 2 : Soit
$$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum u_n(x),$$
définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que $0 < u_n(x) < \frac{1}{xn!}$.
2. En déduire que S_n converge simplement sur $\mathbb{R}_*^+$ et uniformément sur $[a, +\infty)$ pour tout $a > 0$. Montrer que la limite S est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Montrer que $|u_n'(x)| < \frac{1}{x^2 n!}$. En déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. Montrer que $S(x+1) = xS(x) - 1$.

Exercice 3 : Théorème de Borel. Soit (a_n) une suite de nombres réels. On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.

1. On suppose $a_n \leq C^n$ pour un certain nombre $C > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$, et que $f^{(n)}(0) = a_n$.

On suppose à présent (a_n) quelconque. Soit $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, et on définit $M_m := \max\{\|\chi^{(k)}\|_\infty,\ k \leq m\}$. On fixe $\varepsilon_n > 0$ et on définit $\varphi_n(x) := \chi(\frac{x}{\varepsilon_n}) a_n \frac{x^n}{n!}$.

2. Montrer que $\|\varphi_n^{(m)}\|_\infty \leq |a_n| \sum_{k=0}^{m} C_k^m \|\chi^{(k)}\|_\infty \varepsilon_n^{n-m} \leq |a_n| 2^m M_m \varepsilon_n^{n-m}$. (On remarquera que pour $x \geq \varepsilon_n$, $\varphi_n \equiv 0$).
3. En déduire que pour un bon choix de ε_n, $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n^{(m)}\|_\infty < +\infty$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $f := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(k)}(0) = a_k$.

Exercice 4 : Escalier du diable ou escalier de Cantor. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par la récurrence suivante : $f_0((x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$, et f_{n+1} est construite à partir de f_n comme suit :

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Dessiner l'allure des graphes de (f_0), (f_1) et (f_2).

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{2^{-n}}{3}.$$

3. Montrer que pour tout entier $n, p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{2^{-n}}{3}.$$

4. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite.

5. Montrer que f est continue et croissante sur $[0,1]$.

6. Montrer que f est dérivable et de dérivée nulle sur une réunion d'intervalles de longueur totale égale à 1.

Exercice 5 : Courbe de Peano. On définit des fonctions f et g continues, à valeurs dans $[0,1]$, continues, 1-périodiques en imposant les conditions :

$$\begin{cases} (f,g) = (0,0) & \text{sur } \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right] \\ (f,g) = (0,1) & \text{sur } \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right] \\ (f,g) = (1,0) & \text{sur } \left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right] \\ (f,g) = (1,1) & \text{sur } \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right] \end{cases}$$

1. Trouver de tels f et g.

On pose pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{cases} F(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{f\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \\ G(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{g\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \end{cases}$$

On définit alors :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1]\times[0,1] \\ & t & \longmapsto & (F(t), G(t)). \end{array}$$

2. Montrer que φ est bien définie et continue.

3. Montrer que φ est surjective. (Indication : représenter les nombres de $[0,1]$ en base 2.)

Exercice 6 : Intégrale de Gauss via les intégrales de Wallis. On cherche à calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante strictement positive, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
(Indication : Utiliser la question précédente pour montrer que $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$.)

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} g_n & : & [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \mathbb{1}_{[0;\sqrt{n}[}\big(1-\frac{x^2}{n}\big)^n \ . \end{array}$$

3. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0,+\infty[$. (Indication : utiliser l'exercice 4 du TD1.)
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est bien définie, et en déduire que
$$\int_0^{\infty} g_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \ .$$
(Indication : utiliser l'exercice 5 du TD 1.)
5. À l'aide d'un changement de variables, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^{\sqrt{n}} g_n(x)dx = \sqrt{n}W_{n+2} \ .$$
6. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$