TD 3 : Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum z^n$
2. $\sum z^{n!}$
3. $\sum n^2 z^n$
4. $\sum e^n z^n$
5. $\sum n! z^n$
6. $\sum a^{\sqrt{n}} z^n$

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis calculer leur somme pour z réel :

1. $\sum n z^n$,
2. $\sum n^2 z^n$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n+2} z^n$,
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$
5. $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$

Exercice 3 : Dérangements. Un dérangement est une permutation sans point fixe. d_n est lenombre de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$. On pose $d_0 = 1$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$. En déduire que $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$.
3. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Soit p_n la probabilité qu'une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ soit un dérangement. Calculer p_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Soit $a_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt$ et $f(z) := \displaystyle\sum_0^{\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que $1/n \leq a_n \leq 1$. En déduire le rayon de convergence de f.
2. On fixe $x \in]-1, 1[$. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_0^{\infty} \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} x^n dt$.
3. En déduire que $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{(1+x)^2} (\ln 2 - \ln(1-x))$.
4. En effectuant un DL de f en 0, calculer les quatre premiers a_n.

Exercice 5 : Inverse d'une série entière. soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose $a_0 = 1$.

1. Question préliminaire : Soit c_n une suite de nombres réels positifs tels que $c_{n+1} \leq K \sum_{i=0}^{n} c_i$. On choisit $\lambda \geq \max\{K+1, c_0\}$. Montrer que $c_n \leq \lambda^n$.
2. Montrer qu'il existe des coefficients $b_i \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} = 0$ si $n \neq 0$ et 1 si $n = 0$.

3. Soit $r_0 < R$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall r < r_0$,

$$|b_n| r^n \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |b_i| r^i.$$

4. En déduire que $g(z) = \sum b_n z^n$ a un rayon de convergence $R' > 0$.
5. Montrer que $f(z)g(z) = 1$ $\forall |z| \leq \max(R, R')$.
6. Montrer que si f est une série entière de rayon de convergence strictement positif et telle que $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 6 : Théorème d'Abel. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

1. On suppose que $\sum |a_n|$ converge. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$.

On suppose à présent que la série $\sum a_n$ ne converge pas absolument. On pose $A_n := \sum_{n=0}^{N} a_n$, $A_{-1} = 0$, et on suppose dans un premier temps que $\lim a_n = \sum_0^{\infty} a_n = 0$. Pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$, définissons

$$S_\alpha := \left\{ 1 - \rho e^{i\theta} \in D(0,1) \mid |\theta| \leq \alpha \right\}.$$

2. Dessiner S_α. Montrer que si $z \in S_\alpha$ est suffisamment près de 1, on a

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq C(\alpha).$$

3. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$

4. En déduire que si $z_n \in S_\alpha$ tend vers 1, alors $f(z_n) \to 0$.

On suppose à présent simplement que $\sum a_n$ converge (pas nécessairement vers 0).

5. Montrer que si $z_n \in S_\alpha$ tend vers 1, alors $f(z_n)$ tend vers $\sum a_n$.
6. **Application :** Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Exercice 7 : Théorème de Liouville. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Soit $r < R$. Montrer que

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt.$$

2. En déduire que $|a_n| \leq \frac{\|f\|_{\infty, \mathcal{C}(0,r)}}{2\pi r^n}$.
3. On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
4. On suppose que $R = +\infty$ et que il existe une constante $C > 0$ telle que $\max\{|f(z)|,\ z \in \mathcal{C}(0,r)\} \leq C r^N$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus N.