TD 1 : Espaces de Sobolev

Rappels

- Un multi-indice I en dimension d est un d-uplet d'entiers naturels $I = (i_1, \dots, i_d)$. Sa longueur est définie par $|I| = \sum_{j=1}^{d} i_j$. A un tel multi-indice est associé l'opérateur différentiel
$$\partial_I f := \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_d^{i_d}},$$
qui agit sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega) := \{f_{|\Omega},\ f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}$. Toute fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega)$ se prolonge continûment de façon unique à $\overline{\Omega}$, et on note encore f ce prolongement.
- Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $W^{k,p}(\Omega)$ est le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \Omega)$ lorsque cet espace est muni de la norme
$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|I| \leqslant k} \left(\int_\Omega |\partial_I f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$
- On rappelle également que pour $f \in W^{k,p}(\Omega)$, et $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui approche f dans $W^{k,p}(\Omega)$, les suites $\partial_I f_{n|\Omega}$, $|I| \leqslant k$ convergent dans $L^p(\Omega)$ vers des fonctions $\partial_I f$ qui vérifient :
$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \forall |I| \leqslant k, \qquad \int_\Omega \partial_I f \varphi = (-1)^{|I|} \int_\Omega \partial_I \varphi f.$$
- On convient également que lorsqu'un p et un q apparaissent dans un même exercice, ils vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 1 : Régularité de la classe $W^{1,p}(]0,1[)$. Soit tout d'abord $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},]0,1[)$, prolongée par continuité en 0 et 1.

1. Montrer que
$$\forall x, y \in [0,1], \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_{L^p([0,1])} |x-y|^{\frac{1}{q}}$$
2. En déduire que si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},]0,1[)$ vérifie $\|f\|_{W^{1,p}(]0,1[)} \leqslant 1$,
$$\forall x \in [0,1], \ \ |f(x)| \leqslant 2.$$
3. Montrer que pour $x \in [0,1]$, la forme linéaire
$$\begin{array}{rccc} \delta_x & : & (\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},]0,1[), \|\cdot\|_{W^{1,p}(]0,1[)}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est continue et se prolonge de façon continue à $W^{1,p}(]0,1[)$.
4. Montrer que pour $x, y \in]0,1[$, $|||\delta_x - \delta_y||| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{q}}$.

Soit à présent $f \in W^{1,p}(]0,1[)$. Pour $x \in [0,1]$, on notera $\tilde{f}(x) := \delta_x(f)$.

5. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0([0,1])$.
6. Si $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ converge vers f dans $W^{1,p}(]0,1[)$, montrer que f_n converge uniformément vers $\tilde{f}$.
7. En déduire que $\tilde{f} = f$ dans $L^p([0,1])$.

8. Montrer que $\tilde{f}$ est Hölder, avec

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leqslant \|f'\|_{L^p([0,1])}|x-y|^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{W^{1,p}(]0,1[)}|x-y|^{\frac{1}{q}}.$$

9. En déduire qu'une fonction dans $W^{1,p}$ a un représentant $\frac{1}{q}$-Hölder.
10. Montrer que $W^{1,p}(]0,1[) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ (qui à f associe son représentant continu) est un opérateur compact, ce qui signifie qu'il est linéaire et que l'image de la boule unité est relativement compacte.
11. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(]0,1[)$.

Exercice 2 : Inégalité de Poincaré en dimension 1. On définit

$$W_0^{1,p}([0,1]) := \{f \in W^{1,p}(]0,1[) \mid f(0) = f(1) = 0)\}.$$

1. Expliquer pourquoi le résultat de l'exercice précédent est nécessaire et suffisant pour que la définition ci-dessus fasse sens.
2. En utilisant le fait que toute fonction $f \in W^{1,p}(]0,1[)$ a un représentant continu qui vérifie

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_{L^p([0,1])}|x-y|^{\frac{1}{q}},$$

   Montrer que $\|f'\|_{L^p([0,1])}$ est une norme sur $W_0^{1,p}([0,1])$, équivalente à la norme $\|f\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.

Exercice 3 : Inégalité de Poincaré. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert dont la projection sur la première coordonnée est bornée (*i.e.* $\Omega \subset \{-M \leqslant x_1 \leqslant M\}$). Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $x = (x_1, x')$, et on définit

$$\begin{aligned}&\forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \Omega_{x'} := \{x_1 \mid (x_1, x') \in \Omega\} \subset \mathbb{R},\\ &\Omega' := \pi'(\Omega) := \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \Omega_{x'} \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

On définit

$$W_0^{(1,p)}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

1. Montrer que $\Omega_{x'}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\|f(\cdot, x')\|_{L^p(\Omega_{x'})} \leqslant C\|\partial_{x_1} f(\cdot, x')\|_{L^p(\Omega_{x'})}.$$

3. En déduire qu'il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$.
4. En conclure que $\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}|$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Exercice 4 : Une autre caractérisation des espaces de Sobolev. On dit qu'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a une dérivée I-ème $L^p(\mathbb{R}^d)$ au sens des distributions s'il existe $f_I \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f \partial_I \Phi = \int_{\mathbb{R}^d} f_I \varphi.$$

On définit alors $\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des fonctions $L^p(\mathbb{R}^d)$ qui ont des dérivées I-ème au sens des distributions dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|I| \leqslant k$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)} := \sum_{|I|\leqslant k} \|f_I\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) = W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

On rappelle que pour $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\rho \star \cdot : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur linéaire continu. On fixe une approximation de l'unité $\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(B^d(\frac{1}{k}))$, symétrique au sens où $\rho(x) = \rho(-x)$. On fixe aussi une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ à support dans $B(2)$ qui vaut 1 sur $B(1)$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, les $f_I \in L^p(\Omega)$ sont uniques, et que ces fonctions sont toutes nulles si f est nulle. En déduire que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ est une norme sur $\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.
2. Montrer que $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ et que les deux normes coincident sur cet espace.
3. On pose $\chi_\varepsilon(x) := \chi(\varepsilon x)$. Quel est le support de χ_ε.
4. Montrer que si $f \in \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, $\chi_\varepsilon f \in \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ et
$$\chi_\varepsilon f \overset{\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} f.$$
5. Pour $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^d} f \star \rho_k \; g = \int_{\mathbb{R}^d} f \; g \star \rho_k.$$
6. En déduire la même égalité pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$.
7. En déduire que pour $f \in \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, $\rho_k \star (\chi_\varepsilon f) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que $\rho_k \star (\chi_\varepsilon f)_I = (\partial_I \rho_k) \star \chi_\varepsilon f$.
8. En déduire que $\partial_I(\rho_k \star f) \overset{L^p(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} (\chi_\varepsilon f)_I$.
9. Pour $f \in \mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe une suite $\varepsilon_k \to 0$ telle que $\rho_k \star (\chi_{\varepsilon_k} f) \overset{\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} f$, puis que $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ et que $\partial_I f = f_I$.
10. Montrer aussi que $\rho_k \star f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ vers f.

On a donc démontré que $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ correspond exactement aux fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ qui ont des dérivées $L^p(\mathbb{R}^d)$ au sens des distributions. On a aussi prouvé que la convolution de f par une approximation de l'unité fournit une suite dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

11. Lorsque Ω n'est plus $\mathbb{R}^d$ mais un domaine général, reprendre la démonstration précédente pour montrer que $\partial_I(\rho_k \star (\chi_\varepsilon f)) \overset{L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} f_I$.