TD 5 : Transformée de Fourier

Exercice 1 : Transformée de Fourier de la Gaussienne. Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $a > 0$.

1. Montrer que
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{i\xi}{2a})^2} d\xi.$$
2. On considère la fonction holomorphe $g(z) := e^{-az^2}$. Montrer que la restriction de g à la bande $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\xi}{2a}$ tend vers 0 (uniformément en y) lorsque $x = \operatorname{Re}(z)$ tend vers $\pm\infty$.
3. En appliquant le théorème des résidus, montrer que
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$
4. Montrer que en dimension n,
$$\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2}) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}.$$

Exercice 2 : Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. $e^{-|x|}$ et $e^{-a|x|}$, $a > 0$.
2. $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1+ax^2}$. On pourra utiliser la question précédente ou calculer cette transformée de Fourier en utilisant le théorème des résidus.
3. La fonction porte H_0 qui vaut 1 sur $[-1, 1]$ et 0 ailleurs.
4. La fonction porte $H_{a,b}$ qui vaut 1 sur $[a, b]$ et 0 ailleurs.

Calculer également les transformées de Fourier de $f(ax)$ et $f(x + a)$ en fonction de celle de f.

Exercice 3 : On rappelle que la fonction $f_a(x) := \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$ est une distribution de probabilité et que la loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois f_a et f_b est la loi de densité $f_a \star f_b$. En utilisant la transformée de Fourier, calculer $f_{a_1} \star f_{a_2} \star \cdots \star f_{a_N}$.

Exercice 4 : Soit $f_a(x) = \dfrac{2\sin(ax)}{x}$

1. Montrer que $f_a \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f \star f = f$. Montrer que $f = 0$.
3. Calculer $\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}$.
4. En déduire que $f_a \in L^2(\mathbb{R}) \backslash L^1(\mathbb{R})$ et que $f_a \star f_a = f_a$.

Exercice 5 : Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. δ,
2. La fonction de Heavyside H. Retrouver les transformées de Fourier des fonctions portes définies dans l'éxercice ci-dessus.

Exercice 6 : Séries de Fourier et régularité. Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, $S(f)$ sa série de Fourier et $c_n(f) \in \mathbb{C}$ ses coefficients de Fourier.

1. On suppose que $c_n(f) \in \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Montrer que f et $S(f)$ sont continues et coincident. En déduire aussi que f est 2π-périodique.
2. On suppose que $nc_n(f) \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Montrer que f est continue.
3. Rappeler l'expression des coefficients de Fourier de la dérivée de f.
4. On suppose que $nc_n(f) \in \ell^1(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer aussi que si $n^k c_n(f) \in \ell^1$ alors $f \in \mathcal{C}^k$.
5. Montrer que si $n^k c_n(f) \in \ell^2$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
6. On suppose finalement que $|c_n(f)| \leq \lambda^n$ avec $|\lambda| < 1$. Montrer que la série $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\mathbb{Z}}$ converge normalement sur l'ensemble $\{\operatorname{Im} z < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est à déterminer. En déduire que f est analytique sur $\mathbb{R}$.
7. Etudier (rapidement) les réciproques de toutes les affirmations prouvées dans l'exercice.

Exercice 7 : Transformées de Fourier et régularité. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. On suppose tout d'abord que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ et que $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$.

On suppose à présent que $\xi \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que f est continue. On définit alors
$$D_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
3. Montrer que $\widehat{D_h f}(\xi) = g_h(\xi) \xi \hat{f}$, où g_h est une fonction qu'on calculera.
4. En déduire que $D_h f(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\xi \hat{f})(x)$.
5. En déduire que
$$f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0,\ f'(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

On s'occupe à présent des dérivées d'ordres supérieures et de la dimension supérieure.

1. Montrer de même que si $\xi^k \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Montrer que si $\xi^k \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
3. Pour tout k, montrer qu'il existe une constante $n(k, d)$ telle que
$$\|\xi\|^n \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d).$$

Exercice 8 : Transformées de Fourier et espaces de Sobolev H^k.

1. Montrer que pour $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$, $\|f\|_{H^k}$ est comparable à
$$\left(\int_{\mathbb{R}}^d (1 + \|\xi\|^2)^k |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$
2. En déduire que $H^k(\mathbb{R}^d)$ peut aussi être défini comme suit :
$$H^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid (1 + \|x\|^2)^k \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$
3. Déduire de l'exercice précédent qu'il existe une constante $n(d, k)$ telle que
$$f \in H^{n(d,k)}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d).$$

Exercice 9 : Principe d'incertitude de Heisenberg. On se propose ici de montrer l'inégalité de Heisenberg : pour $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{4} \|f\|^4_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On considère dans un premier temps $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que xf et $\xi \hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe deux suites $a_n, b_n \to +\infty$ telles que $a_n |f(-a_n)|^2, b_n |f(b_n)|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx.$$
3. Calculer $(|f|^2)'$. En déduire *via* une intégration par partie sur $[-a_n, b_n]$ que
$$\|f\|^2_{L^2} = -2\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right).$$
4. En déduire l'inégalité de Heisenberg pour f.

On considère à présent $f \in L^2(\mathbb{R})$. On considère $\rho_n(x) := \sqrt{\frac{\pi}{n}} e^{-nx^2}$ et $f_n := \rho_n \star f$.

5. Si le membre de gauche de l'inégalité de Heisenberg est fini, montrer que f et $\widehat{f}$ sont $H^1(\mathbb{R})$.
6. En remarquant que $\widehat{\rho}_n \overset{CVUK}{\longrightarrow} 1$ et que $\rho_n' \overset{CVUK}{\longrightarrow} 0$, montrer alors que $f_n \overset{H^1}{\longrightarrow} f$ et $\widehat{f}_n \overset{H^1}{\longrightarrow} \widehat{f}$.
7. Conclure.