TD 6 : Minimisation de fonctionnelles convexes et EDP.

1 Equations de Sturm-Liouville.

Exercice 1 : Equations différentielles d'ordre 2. Soit $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie

$$-pu'' + fu' + gu = h.$$

1. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la fonction $v := \alpha u$ vérifie une équation du type
$$-pv'' + (f + \frac{\alpha'}{\alpha})v' + \hat{g}f = \hat{h},$$
où $\hat{g}$ et $\hat{h}$ sont des fonctions à déterminer. Voir en particulier que si $h = 0$, $\hat{h} = 0$.
2. Montrer qu'on peut choisir α de sorte que v soit solution de
$$-pv'' + qv = r$$
ou encore
$$-(pv')' + qv = r$$
où q, r sont des fonctions qui dépendent de p, f, g, h, et $r = 0$ dès que $h = 0$.

Exercice 2 : Equation de Sturm-Liouville et Wronskien. On considère l'équation

$$\ddot{x} + p(t)x = 0.$$

Pour $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on pose $X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$.

1. Si x est solution, quelle équation X vérifie-t'il ?
2. Quel est la structure de l'espace des solutions ?
3. De quel dimension est cet espace ?
4. Soit x une solution non nulle. On suppose $x(t_0) = 0$. Montrer que $\dot{x}(t) \neq 0$.
5. Soient x_1, x_2 deux solutions indépendantes de cette équation. Montrer que $W(t) := \det(X_1, X_2)$ ne s'annule jamais. En déduire que si x_1 a deux zéros t_1, t_2 et ne s'annule pas entre t_1 et t_2, alors x_2 s'annule exactement une fois entre t_1 et t_2.
6. Quelles sont les solutions lorsque p est une fonction constante ? Préciser en fonction du signe de p, et vérifier le point précédent.

On suppose à présent que p est une fonction qui vérifie $p(t) \geq \varepsilon \ \forall t \in \mathbb{R}$, et on considère une solution f de notre équation. Dans toutes les questions suivantes, l'indication est la même, pensez aux propriétés de convexité de la fonction f.

7. On suppose que $f(0) > 0$ et que $f'(0) > 0$. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) > 0$ et $f'(t_0) < 0$.
8. On suppose à présent $f(0) > 0$ et $f'(0) < 0$. Montrer qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $f(t_1) = 0$ et $f'(t_1) < 0$.
9. Montrer qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $f(t_2) = 0$ et $f'(t_2) > 0$.
10. Montrer que f a une infinité de zéros.
11. Montrer que f est bornée.
12. Tracer schématiquement le graphe de deux solutions indépendantes de l'équation sous cette hypothèse sur la fonction p.

Exercice 3 : Formulation faible d'une équation de Sturm-Liouville. Soit $p \in C^1([0,1]), p \geq \alpha > 0$, $q \in C^0([0,1]), q \geq 0$, $f \in C^0(]0,1[) \cap L^2(]0,1[)$.

Problème de Sturm-Liouville : Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in C^2(]0,1[) \cap C^0([0,1])$ telle que :

$$(\star) \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans un premier temps à l'unicité de la solution, qu'on établit par un argument de type principe du maximum.

1. Montrer qu'établir l'unicité est équivalent à montrer que la seule solution du problème $(\star)$ avec $f = 0$ est la fonction nulle. On suppose à présent que v est solution de ce problème.
2. Montrer qu'au maximum $x_{\max}$ de v, on a $v'(x_{\max}) = v''(x_{\max}) = 0$.
3. Montrer que v' vérifie une équation différentielle d'ordre 2.
4. En déduire que $v' = 0$, puis que $v = 0$.

On passe maintenant à l'existence d'une solution. On définit

$$H_0^1([0,1]) := \{u \in H^1([0,1]) \ \|\|; u(0) = u(1) = 0\}.$$

5. Montrer que la fonctionnelle $F : H_0^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_0^1 p\,|u'|^2 d\lambda + \int_0^1 q\,|u|^2 d\lambda - \int_0^1 f\,u d\lambda$$

   est convexe, continue et coercive. En déduire qu'elle admet un minimum.
6. Montrer que F est différentiable, de dérivée

$$F'(u)h = \int_0^1 2pu'h' + quh - fh.$$

7. En déduire qu'il existe une fonction $u \in H_0^1([0,1])$ telle que

$$\forall h \in H_0^1([0,1]), \quad \int_0^1 2pu'h' + quh - fh = 0$$

   (on dit que u est *solution faible* de $(\star)$).
8. Montrer que $pu' \in H^1([0,1])$ (utiliser votre critère préféré de régularité H^1 et montrer que u' le satisfait).
9. En déduire que $u \in H^2$ et que $-(pu')' + qu = f$ en tant qu'égalité de fonctions L^2.
10. En utilisant la régularité Sobolev $H^1[0,1] \subset \mathcal{C}^0([0,1])$ établie dans le TD1 et les hypothèses sur les fonctions f, q, p, montrer que pu' est de classe $\mathcal{C}^1$, puis que u est de classe $\mathcal{C}^2$.
11. Montrer que u est en fait une solution de $(\star)$ (dite forte).

Exercice 4 : Théorème de Lax-Milgram Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive. Cela signifie que :

- $(u, v) \mapsto a(u, v)$ est linéaire en les deux variables,
- Il existe $C > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ (le démontrer éventuellement),
- Il existe $\alpha > 0$ telle que $|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|^2$. Il s'agit en fait d'une coercivité forte. Un coercivité plus faible (ne convenant pas à cet exercice), consiste à demander que $a(u, u)$ tende vers $+\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}(H, H)$ (linéaire continue) telle que $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$.
2. Montrer que $\|Av\| \geq \alpha\|v\|$, et en déduire que A est injective.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ est fermée.
4. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ est dense.
5. en déduire que A est bijective.
6. En déduire le théorème de Lax-Milgram : sous les hypothèses de l'exercice, $\forall \varphi \in H^*$, il existe $u \in H$ telle que
$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = \varphi(v)$$
7. Montrer que dans le cadre du problème de Sturm-Liouville de l'exercice précédent, en posant $H := H_0^1([0, 1])$, $a(u, v) = \int_0^1 pu'v' + quv$, $\varphi(v) = \int_0^1 fv$, la fonctionnelle a vérifie les hypothèses de Lax-Milgram (ceci nécessite l'inégalité de Poincaré, établie dans le TD1) et $\varphi \in H^*$. Montrez que le théorème de Lax-Milgram suffit donc pour obtenir le résultat de l'exercice précédent, et qu'il n'est donc pas utile d'apprendre à minimiser des fonctionnelles convexes dans des espaces de Banach généraux pour ce problème.

2 Résolution faible du Laplacien sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec conditions de Dirichlet

On s'intéresse dans cette partie à la formulation faible et à la résolution faible du problème suivant :

Etant donné un ouvert borné à bord lisse $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, trouver une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que

$$(\star) \qquad \begin{cases} \Delta u = g & \text{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Exercice 5 : L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. On admettra qu'il existe une constante C qui ne dépend que de Ω, telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$\|f_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

1. Montrer qu'il existe une application linéaire continue
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} & : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ & & f & \longmapsto & f_{|\partial\Omega} \end{array}$$
telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{Tr}\,(f) = f_{|\omega}$.
2. Montrer que l'espace
$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \mathrm{Tr}\,(u) = 0\}$$
est un espace de Banach reflexif, qui est un Hilbert pour $p = 2$.

Exercice 6 : Formulation faible du problème $(*)$. On rappelle que $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$, et que si $\vec{X}$ est un champ de vecteurs lisse sur un domaine $\overline{D}$ à bord lisse, alors

$$\int_D \operatorname{div} \vec{X} d\lambda = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{N} d\sigma,$$

où $\vec{N}(x)$ est la normale sortante à $\partial\Omega$ en x et $d\sigma(x)$ est la mesure $d-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Montrer que

$$\int_\Omega \varphi \Delta u = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

2. Montrer que si u est solution de notre problème $(*)$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$(\star)_{\text{weak}} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + g\varphi = 0.$$

On pose

$$\begin{array}{rcccl} a & : & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda & : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \int_\Omega gv. \end{array}$$

3. Montrer que a est une forme bilinéaire continue positive (c'est-à-dire $a(u,u) > 0$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$) et que Λ est une forme linéaire continue.
4. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, conclure qu'il existe une unique solution à l'équation $(\star)_{\text{weak}}$.
5. En vous inspirant de la question 5 de l'exercice 3, montrer qu'on peut aussi obtenir ce résultat par minimisation d'une fonctionnelle convexe.

3 Une EDP non-linéaire.

On considère à présent l'EDP suivante : $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné à bord lisse, $g \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $q \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ une fonction positive, et $\alpha \in \mathbb{N}$ un nombre impair. On cherche $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que

$$(\star) \qquad \begin{cases} -\Delta u + qu^\alpha = g & \text{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

En fait, comme dans les énoncés ci-dessus, on va plutôt chercher une solution d'une formulation faible. On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(\star)_{\text{weak}} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v + qu^\alpha v - gv = 0.$$

1. Montrer qu'une solution de $(\star)_{\text{weak}}$ qui est $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est solution de $(\star)$.
2. Montrer que la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcccl} F & : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & \int_\Omega \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2 + \frac{q}{\alpha+1} f^{\alpha+1} - fg \end{array}$$

   est convexe, continue et coercive (on utilisera le lemme de Poincaré pour la coercivité).
3. Montrer que F est différentiable, et calculer sa différentielle.
4. En déduire l'existence d'une solution faible à $(\star)_{\text{weak}}$.