

Espaces de Sobolev

0. Complétude d'un espace métrique

Thé: Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $(\bar{X}, \bar{d})$ ayant les propriétés:

i) $(X, d) \hookrightarrow (\bar{X}, \bar{d})$. Ceci signifie l'existence d'une injection $i: X \rightarrow \bar{X}$ telle que $\bar{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$

ii) $\text{Im } i$ est dense dans $(\bar{X}, \bar{d})$.

De plus, l'espace $(\bar{X}, \bar{d})$ est unique à isométrie près: si $(\bar{X}_1, \bar{d}_1)$ et $(\bar{X}_2, \bar{d}_2)$ sont attachés à (X, d) , il existe une isométrie $f: (\bar{X}_1, \bar{d}_1) \rightarrow (\bar{X}_2, \bar{d}_2)$.

Enfin, toute application uniforme $f: (X, d) \rightarrow (X', d')$ se prolonge de façon unique en une application continue $\bar{f}: (\bar{X}, \bar{d}) \rightarrow (\bar{X}', \bar{d}')$. Cette application $\bar{f}$ est aussi l'unique module de C^0 que f .

Preuve:

Def: Soit $(\bar{X}, \bar{d}) := \{ (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ est de Cauchy } \}_{\sim}$

où $(x_n) \sim (y_n)$ si $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Posons alors $\bar{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$.

$\rightarrow$ $\bar{d}$ est bien définie: Si $(x_n), (y_n)$ et des suites de Cauchy, vérifions que $d(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}$: fixons $\varepsilon > 0$.

$\exists N(\varepsilon) \mid \forall p, q \geq N(\varepsilon), d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$ et $d(y_p, y_q) \leq \varepsilon$.

alors $\forall p, q \geq N$,

$$|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leq d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q)$$

Donc

$$|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leq d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) + d(x_q, y_q) + d(y_q, y_p) \leq 4\varepsilon. \quad \square$$

De plus, si $(x'_n) \sim (x_n), (y'_n) \sim (y_n)$,

$$d(x'_n, y'_n) \leq \underbrace{d(x'_n, x_n)}_{\rightarrow 0} + d(x_n, y_n) + \underbrace{d(y_n, y'_n)}_{\rightarrow 0}$$

Donc la limite de $d(x_n, y_n)$ ne dépend pas de la suite représentative choisie.

→ $\exists i: (X, d) \hookrightarrow (\bar{X}, \bar{d})$ isométrique:
on définit $\bar{d}$ par

$$i(x) = [(x, x, \dots, x, \dots)] \in \bar{X}.$$

évident, $\bar{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$. (En fait, i injective)

→ l'image de i est dense: Soit $x \in \bar{X}$, et
considérons un représentant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de x . Alors
 $i(x_n) \rightarrow x$. En effet, fixons $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon)$ tq
 $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N(\varepsilon)$.

alors $\forall n \geq N(\varepsilon)$,

$$d(i(x_n), x) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_n, x_p) \leq \varepsilon.$$

→ Les suites de Cauchy de $\text{Im}(i)$ convergent dans $\bar{X}$:
Soit $x_n \in X$ tq $(i(x_n))$ est de Cauchy dans $\bar{X}$. Puisque
 i est isométrique, (x_n) est de Cauchy dans X .
Soit alors $x_\infty := [(x_n)] \in \bar{X}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \bar{d}(i(x_n), x_\infty) &= \lim_{p \rightarrow \infty} d(i(x_n)_p, x_p) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_n, x_p) \end{aligned}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon) / \forall p, q \geq N(\varepsilon), d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.
 $\forall n \geq N(\varepsilon)$, on a donc $\lim_{p \rightarrow \infty} d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$

Donc $\bar{d}(i(x_n), x_\infty) \leq \varepsilon$. Donc $i(x_n) \rightarrow x_\infty$.

→ Les suites de Cauchy de $(\bar{X}, \bar{d})$ convergent:
Soit $(\bar{x}_n) \in \bar{X}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\bar{d}$.
Fixons une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Puisque $\text{Im}(i)$ est
dense dans $\bar{X}$, il existe $x_n \in X$ tq
 $\bar{d}(i(x_n), \bar{x}_n) \leq \varepsilon_n$.

alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &= \bar{d}(i(x_p), i(x_q)) \\ &\leq \bar{d}(i(x_p), \bar{x}_p) + \bar{d}(\bar{x}_p, \bar{x}_q) + \bar{d}(\bar{x}_q, i(x_q)) \\ &\leq \varepsilon_p + \varepsilon_q + \bar{d}(\bar{x}_p, \bar{x}_q). \end{aligned}$$

alors $\forall p, q \geq N(\varepsilon)$ tq: $\varepsilon_n \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$
 $\bar{d}(\bar{x}_p, \bar{x}_q) \leq \varepsilon \quad \forall p, q \geq N(\varepsilon)$

on a donc

$$d(x_p, x_q) \leq 3\varepsilon.$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc
 $i(x_n) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{x}_\infty$.

$$\text{d'ors } d(\bar{x}_n, \bar{x}_\infty) \leq d(\bar{x}_n, i(x_n)) + d(i(x_n), \bar{x}_\infty) \\ \leq \varepsilon_n + d(i(x_n), \bar{x}_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc bien noté que $(\bar{x}, \bar{d})$ est complet
et que $\text{Im}(i)$ est dense où $i: (X, d) \hookrightarrow (\bar{X}, \bar{d})$
est une isométrie.

→ Voyons la propriété d'extension: soit $(X, d), (Y, d)$
deux espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$ uniformément continue.
Soient $(\bar{X}, \bar{d}), (\bar{Y}, \bar{d})$ des espaces métriques complets
avec des isométries $i: (X, d) \hookrightarrow (\bar{X}, \bar{d})$
 $j: (Y, d) \hookrightarrow (\bar{Y}, \bar{d})$

d'images denses.

Soit $\bar{x} \in \bar{X}$, $x_n \in X$ tq $i(x_n) \rightarrow \bar{x}$.

Puisque i est une isométrie et f UC, la suite
 $f(x_n)$ est de Cauchy (c'est facile).

Donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{y}$ puisque $\bar{Y}$ est complet.

De plus, si x_n, x'_n vérifient $i(x_n), i(x'_n) \rightarrow \bar{x}$,

$$\exists N / \forall n \geq N, d(i(x_n), i(x'_n)) \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } d(x_n, x'_n) \leq \varepsilon$$

Donc $d(f(x_n), f(x'_n)) \leq \rho(\varepsilon)$ où ρ est le
module de C^0 de f ($\rho(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ car f UC).

Donc $\bar{y}$ ne dépend pas de la suite x_n .

On définit donc $\bar{f}(\bar{x}) = f(\lim i(x_n)) = \bar{y} = \lim f(x_n)$

On vérifie immédiatement que $\rho(\bar{f}, \varepsilon) = \rho(f, \varepsilon)$
et que $\bar{f}$ est l'unique prolongement C^0 de f à $\bar{X}$.

Rq: On a seulement utilisé que $\text{Im } i: X \rightarrow \bar{X}$ est
dense et que $(\bar{Y}, \bar{d})$ est complet.

→ Voyons finalement l'unicité: si $(\bar{X}', \bar{d}')$ est un
espace métrique complet avec

$i': (X, d) \hookrightarrow (\bar{X}', \bar{d}')$ isométrie d'image dense,

i' se prolonge en $\bar{i}': (\bar{X}, \bar{d}) \rightarrow (\bar{X}', \bar{d}')$. C'est
car i' est une isométrie, il en va de même
pour $\bar{i}'$. □

1. Def:

Notation: Pour $f \in C^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^d$, et $I = (i_1, \dots, i_d)$,
on note:

$$\begin{aligned} & |I| := i_1 + \dots + i_d \\ & \text{Pour } |I| \leq k: \quad \partial_I f := \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_d^{i_d}} \end{aligned}$$

Def: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On définit

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &:= \overline{C^\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad \|f\|_{W^{k,p}} := \sum_{i=0}^k \sum_{|I|=i} \|\partial_I f\|_{L^p(\Omega)} \\ H^k(\Omega) &:= \overline{C^\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad \|f\|_{H^k}^2 := \sum_{i=0}^k \sum_{|I|=i} \|\partial_I f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ W^{k,p}(\Omega) &\text{ est un espace de Banach} \\ H^k(\Omega) &\text{ est réel} \end{aligned}$$

Prop: $H^k(\Omega) \simeq W^{k,2}(\Omega)$ et les normes associées sont équivalentes.
(exercice).

Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$. Il existe par définition des fonctions $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $f_n \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} f$ donc la suite (f_n) est de Cauchy pour la norme $\sum_{|I| \leq k} \|\partial_I f_n\|_{L^p(\Omega)}$, donc:

$$\forall I \text{ avec } |I| \leq k, \quad \partial_I f_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} g_I.$$

où donc les g_I sont dans $L^p(\Omega)$.

Affirm: Les fonctions g_I ne dépendent pas de la suite choisie.

Preuve: Si $f_n \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} f$, $f_n' \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $i=1,2$, on a:
Notons g_I^i , $i=1,2$ les fonctions $L^p(\Omega)$ associées.

La suite $(f_n^1, f_n^2, f_n^1, f_n^2, f_n^1, f_n^2, \dots, f_n^1, f_n^2, \dots) \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} f$
Donc il existe des $f_n^1, f_n^2, \dots$

$$g_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_I f_n^1 \xrightarrow{L^p(\Omega)} g_I^1$$

$$\text{Donc } g_I = g_I^1 = g_I^2 \quad \square$$

Prop: L'application $f \mapsto (g_I)_I$ est injective.

Preuve: Par défaut, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} f \iff \partial_I f_n \xrightarrow{L^p} g_I \quad \forall |I| \leq k$
Donc si $\phi(f) = \phi(f_2)$, $f_n \rightarrow f_1$ n: $f_n \rightarrow f_2$. Donc $f_1 = f_2$ par défaut du complet. $\square$

Rque: Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\Omega)$, on a $g_\pm = \partial_\pm f|_\Omega$

Preuve: évident si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial_\pm f|_\Omega \in L^p(\Omega)$ et $\partial_\pm f|_\Omega \xrightarrow{L^p(\Omega)} \partial_\pm f|_\Omega$

Donc $g_\pm = \partial_\pm f|_\Omega$. $\square$

Prop: Si φ est C^∞ à support compact dans Ω ($\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$),

$$\int_\Omega g_0 \partial_i \varphi \, d\mu = (-1)^{|I|} \int_\Omega g_I \varphi \, d\mu \quad \forall I \leq \mathbb{R}.$$

Preuve: Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$ $g_\pm$ les fonctions associées.
Soit $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial_\pm f_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} g_\pm$.

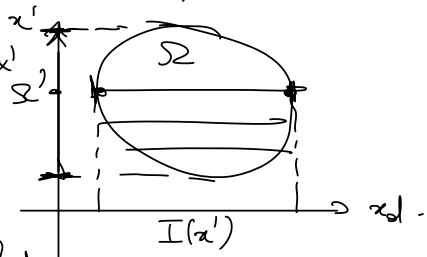
En raisonnant par récurrence, il suffit de voir $i=1$,

$$\int_\Omega g_0 \partial_1 \varphi \, d\mu = - \int_\Omega g_1 \varphi \, d\mu.$$

et par symétrie, il suffit de le prouver pour $i=d$.

Ecrivons alors $\Omega = \{ (x', x_d) \in \mathbb{R}^n \mid x_d \in I(x'), x' \in \Omega' = \pi(\Omega) \}$

Puisque $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \, d\mu &= \int_{\Omega'} \left(\int_{x_d \in I(x')} f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \, dx_d \right) dx' \\ &= \int_{\Omega'} \left[- \int_{I(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \varphi \, dx_d + [f_n \varphi]_{\partial I(x')} \right] dx' \end{aligned}$$


Or $[f_n \varphi]_{\partial I(x')} = 0$ car $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ donc $\varphi|_{\partial I(x')} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad &= - \int_{\Omega'} \left(\int_{I(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \varphi \, dx_d \right) dx' \\ &= - \int_\Omega \varphi \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \, d\mu \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \int_\Omega f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \, d\mu = - \int_\Omega \varphi \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \, d\mu.$$

$$\text{Or} \quad f_n \xrightarrow{L^p} g_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \xrightarrow{L^p} g_d$$

Puisque $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_d}$, $\varphi \in L^q(\Omega)$, par Holder:

$$\left| \int_{\Omega} (f_n - f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} d\mu \right| \leq \|f_n - f\|_{L^p} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \right\|_{L^q}$$

$$\left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_d} - \frac{\partial f}{\partial x_d} \right) \varphi d\mu \right| \leq \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_d} - \frac{\partial f}{\partial x_d} \right\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}$$

$$\text{Donc } \int_{\Omega} f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} d\mu = - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial f_n}{\partial x_d} d\mu$$

$$\int_{\Omega} g_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} d\mu$$

$$\int_{\Omega} \varphi g_n d\mu \quad \square.$$

Lemme: Si $f_1, f_2 \in W^{k,p}(\Omega)$ et $g_{1,0} = g_{2,0}$ alors $f_1 = f_2$.

Preuve: D'après le lemme précédent, $\forall |\mathbf{I}| \leq k$, on a

$$\int_{\Omega} g_{1,0} \frac{\partial^{\mathbf{I}} \varphi}{\partial x^{\mathbf{I}}} d\mu = (-1)^{|\mathbf{I}|} \int_{\Omega} g_{1,\mathbf{I}} \varphi$$

$$\int_{\Omega} g_{2,0} \frac{\partial^{\mathbf{I}} \varphi}{\partial x^{\mathbf{I}}} d\mu = (-1)^{|\mathbf{I}|} \int_{\Omega} g_{2,\mathbf{I}} \varphi.$$

$$\text{Donc } \forall \mathbf{I}, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} g_{1,\mathbf{I}} \varphi = \int_{\Omega} g_{2,\mathbf{I}} \varphi.$$

$$\text{Puisque } g_{1,\mathbf{I}}, g_{2,\mathbf{I}} \in L^p(\Omega) \quad g_{\mathbf{I}} := g_{1,\mathbf{I}} - g_{2,\mathbf{I}} \in L^p(\Omega)$$

$$\text{et vérifie: } \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} g_{\mathbf{I}} \varphi = 0.$$

Lemme: Si $g \in L^p(\Omega)$ vérifie $\int_{\Omega} g \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors $g=0$.

Preuve: $g \in L^p : (|g|^{p-1}) \in L^q(\Omega)$ car

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p+q = pq \Rightarrow (p-1)q = p$$

$$\text{Donc } Sg = |g|^{p-1} \in L^q(\Omega).$$

$$\text{Soit alors } \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega) \quad \varphi_n \xrightarrow{L^q(\Omega)} Sg = |g|^{p-1}.$$

$$\text{Puisque } g \in L^p(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} (\varphi_n - Sg) |g|^{p-1} g \leq \|\varphi_n - Sg\|_{L^q} \|g\|_{L^p} \xrightarrow{\rightarrow 0} 0$$

$$\text{Dac } 0 = \int_{\Omega} \chi_{\Omega} g \longrightarrow \int_{\Omega} |g|^{p-1} |g| = \int_{\Omega} |g|^p$$

$$\text{Dac } g = 0 \quad \square.$$

Par conséquent sous les hypothèses du lemme, on a $g_{\pm I} = g_{\pm I} \in L^p(\Omega) \quad \forall I$. Puisque $f \mapsto (g_{\pm I})$ est injective, on en déduit donc que $f_1 = f_2$. $\square$

Corollaire: $f \in W^{k,p}(\Omega) \longmapsto g_{\pm I} \in L^p(\Omega)$ est injective.

Notation: On note alors $g_0 = f$, $g_{\pm I} = \partial_{\pm I} f$, autrement dit, on note $\Phi(f) = (f, \partial_{\pm I} f, \partial_{\pm I}^2 f, \dots, \partial_{\pm I}^k f, \dots, \partial_{\pm I}^k f, \dots)$

On a évident $f \in W^{k,p} \implies f \in W^{k-1,p}$
car $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{L^p} f \in W^{k,p}$, on a $\partial_{\pm I} f_n \xrightarrow{L^p} \partial_{\pm I} f \quad \forall |I| \leq k$

Dac $\partial_{\pm I} f_n$ est de Cauchy de $L^p \quad \forall |I| \leq k$
Dac $\partial_{\pm I} f_n$ $L^p \quad \forall |I| \leq k-1$

Dac f_n est $\overline{}$ pour $\|\cdot\|_{W^{k-1,p}}$.

En notant (provisoirement) $i((f_n))$ la suite de f_n dans $W^{k-1,p}$ on vérifie facilement que $i((f_n))$ ne dépend pas de la suite (f_n) choisie, donc

$$i: W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k-1,p}(\Omega).$$

Finalité: $W^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$
 $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L^p(\Omega)$
 (la flèche incluse $\hookrightarrow$ signifie l'injectivité de l'application). On écrit f pour toutes les notations nécessaires: $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $f \in W^{k-1,p}(\Omega)$, ..., $f \in L^p(\Omega)$.
 Si $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $\forall |I| \leq k$, $\exists \partial_{\pm I} f \in L^p(\Omega)$ tq
 $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} f \partial_{\pm I} \varphi = (-1)^{|I|} \int_{\Omega} \varphi \partial_{\pm I} f.$

Il y a encore des millions de propriétés de ces espaces de Sobolev, mais cela suffit pour l'instant. Disons pour l'instant qu'il s'agit de fonctions L^p qui ont des dérivées faibles L^p .

On peut aussi faire le travail dans le sens inverse: définir $W^{k,p}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions ayant

des "dérivées faibles" L^p défini la norme comme la
somme des normes L^p des dérivées faibles, et on a
les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans cet espace.