Resolution forte du Laplacien. (TD5)

- Ω domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à bord lisse (C^1 suffit)
- $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue
- $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de regularité à préciser (au moins continue)

$\mathcal{L}(\Omega, f, g)$: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tq $\begin{cases} \Delta u = g \text{ sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$

1. Decomposition du problème :

La linéarité de l'operateur Δ et de la condition initiale permet de décomposer le problème en deux sous problèmes :

Thm 1 : Le problème $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$ admet une ! solution de classe C^∞ sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$.

Une fois ce theorème etabli, on a donc, en appelant v_f la solut° de $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$:

u solution de $\mathcal{L}(\Omega, f, g) \Longleftrightarrow u - v_f$ solution de $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$

Theoreme 2 : Sous certaines conditions sur g (par exemple $g \in C^k(\overline{\Omega})$, $k > d/2$), $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$ a une unique solution de classe au moins C^2.

2. Resolution de $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$:

On veut resoudre $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$.

Une fonction qui verifie $\Delta u = 0$ est appelée harmonique. Une première remarque est la suivante :

Thm 3 : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique ssi :
- $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$
- $\forall B(x, r) \subset\subset \Omega$, on a $u(x) = \dfrac{1}{\mu(S(r))} \displaystyle\int_{S(x,r)} u \, d\sigma$

Corollaire : Soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ harmonique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.
Si : $\exists x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ alors u est constante

Preuve : Soit $\Gamma := \{x \in \Omega \mid u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u\}$
- $\to$ Γ est fermé par continuité de u
- $\to$ Γ est ouvert ds Ω car si $x \in \Gamma$, soit $B(x, \delta) \subset \Omega$.
  $\forall r < \delta$, on a $u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u = \text{moy}(u, S(x, r))$

Or $u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$ sur $S(x,r)$ donc par continuité de u, on doit avoir $u = \max_{\overline{\Omega}} u$ sur $S(x,r)$.
On en déduit que $B(x,\delta) \subset \Gamma$.

→ Par hypothèse, $x_0 \in \Gamma$ donc $\Gamma \neq \phi$
→ Par connexité de $\overline{\Omega}$, $\Gamma = \Omega$. ☒

La preuve du th 1 se fait alors en 2 étapes:

<u>Étape 1:</u> $f \in C^\infty(\partial\Omega)$

Par définition, cela signifie que f est la restriction de $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à $\partial\Omega$. Quitte à multiplier par une fonction $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur $\overline{\Omega}$, on peut en plus supposer que $\tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Notons alors que $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|\partial\Omega = f \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta(u - \tilde{f}) = -\Delta\tilde{f} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \\ u - \tilde{f}|\partial\Omega = 0. \end{cases}$

On sait déjà:

Il existe une unique solution faible $v \in H_0^1(\Omega)$ à
$\Delta v = g := -\Delta\tilde{f}$ (car $g \in L^2(\Omega)$)

<u>Thm (Régularité elliptique):</u> Si $\Delta u \in H^k(\Omega)$ alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Comme $\tilde{f} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, on a $\Delta\tilde{f} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, donc $g \in H^k(\Omega)$ $\forall k$.
Donc $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)$ $\forall k$.
Or les résultats d'injection de Sobolev garantissent que si $k > d/2$, une fonction $v \in H^{k+2}(\Omega)$ est dans $C^2(\overline{\Omega})$.

Donc v est en fait une solution faible dans $C^2(\overline{\Omega})$.
On a vu qu'alors, v est solution forte: $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$,
$\begin{cases} \Delta v = -\Delta\tilde{f} \\ v|\partial\Omega = 0 \end{cases}$
Donc $u := v + \tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution de $\mathcal{L}(\Omega, f, 0)$.

<u>Étape 2:</u> $f \in C^0(\partial\Omega)$.

Soit $f_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telles que $f_n|\partial\Omega \xrightarrow{C^0} f$.
Soit $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de $\mathcal{L}(\Omega, f_n, 0)$, càd
$\begin{cases} \Delta u_n = 0 \\ u_n|\partial\Omega = f_n. \end{cases}$

<u>Affirmation:</u> (u_n) est de Cauchy dans $C^0(\Omega)$.
Fixons en effet $\varepsilon > 0$ et N tq $\forall n,m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.
Alors $\Delta(u_n - u_m) = 0$ donc $u_n - u_m$ vérifie le principe du maximum: $\max_{\overline{\Omega}} (u_n - u_m) = \max_{\partial\Omega} (u_n - u_m) \leq \varepsilon$

De même pour $u_n - u_m$, donc $\max_{\overline{\Omega}} |u_n - u_m| \leq \varepsilon$
Donc $\forall n, m \geq N$, $\|u_n - u_m\|_{\infty, \overline{\Omega}} \leq \varepsilon$.

Alors $u_n \xrightarrow{CVU} u \in C^0(\overline{\Omega})$.
De plus, u vérifie la propriété de la moyenne : Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ tq $B(x,r) \subset\subset \Omega$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{moy}(u, S(x,r)) &= \lim \mathrm{moy}(u_n, S(x,r)) && (\text{CVU}) \\
&= \lim u_n(x) && (u_n \text{ harmonique}) \\
&= u(x) && (\text{CVU})
\end{aligned}
$$

Donc u vérifie la propriété de la moyenne, donc $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = \lim u_n|_{\partial\Omega} = f$ □

3. Résolution de $\mathcal{L}(\Omega, 0, g)$:

On suppose à présent $g \in H^k(\Omega)$, $k > d/2$, on veut résoudre
$\begin{cases} \Delta u = g \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Comme $g \in H^k(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ donc il existe une solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ à $\Delta u = g$.
D'après le théorème de régularité elliptique, comme $g \in H^k(\Omega)$, $u \in H^{k+2}(\Omega)$.
Comme $k > d/2$, les résultats de régularité Sobolev impliquent que $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
Les résultats du TD3 garantissent alors que u est solution forte de $\begin{cases} \Delta u = g \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$.

4. Unicité :

Soit $g \in L^2(\Omega)$, $f \in C^0(\partial\Omega)$. On veut mq il existe au plus une solution à
$\begin{cases} \Delta u = g \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

En effet, si u, v sont deux telles fonctions, $\varphi := u - v$ vérifie $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
Donc φ est harmonique donc $\max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi = 0$
$-\varphi$ " " " $\max_{\overline{\Omega}} -\varphi = \max_{\partial\Omega} -\varphi = 0$

Donc $\varphi \equiv 0$ sur Ω. □

5- Propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques :

On veut à présent montrer :

Thm 3 : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique ssi :
- $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$
- $\forall B(x,r) \subset\subset \Omega$, on a $u(x) = \dfrac{1}{\mu(S(r))} \displaystyle\int_{S(x,r)} u \, d\sigma$

On commence par quelques préliminaires :

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on note $m(r) := \dfrac{1}{\mu(S(r))} \displaystyle\int_{S(0,r)} u \, d\sigma = \dfrac{1}{r^{d-1} S} \int_{S(0,r)} u \, d\sigma$

où $S = \mu(S(1))$.

1. $m(r) = \dfrac{1}{r^{d-1} S} \displaystyle\int_{S(r)} u \, d\sigma = \dfrac{1}{r^{d-1} S} \int_{S(1)} u(r\xi) \, |\mathrm{Jac}\, \varphi| \, d\xi$

où $\varphi : \begin{array}{l} S(1) \longrightarrow S(r) \\ \xi \longmapsto r\xi \end{array}$ vérifie donc $d_\xi \varphi$ est une dilatation de facteur r, sur S qui est de dimension $d-1$, donc $\mathrm{Jac}\,\varphi = r^{d-1}$ est une constante.

Donc $m(r) = \dfrac{1}{S} \displaystyle\int_{S(1)} u(r\xi) \, d\xi$

2. Soit $r < 1$. $\rho \mapsto u(\rho\xi)$ est de classe C^1 en r $(\forall \xi)$, car u est supposée de classe C^2 sur $B(1)$. La dérivée de cette fonction est
$$\frac{\partial u}{\partial r}(\rho\xi).$$
Pour $r < 1$, cette fonction est bornée :
$$\forall \xi \in S(1), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial r}(\rho\xi) \right| \leq \underbrace{\max \|u'\|_{\infty, S(r)}}_{\text{constante, intégrable sur } S(1)} < +\infty$$
puisque $S(1)$ est compact.

On en déduit que m est dérivable en r, de dérivée
$$m'(r) = \frac{1}{S} \int_{S(1)} \frac{\partial u}{\partial r}(r\xi) \, d\xi = \frac{1}{S} \int_{S(1)} \nabla u(r\xi) \cdot \vec{\xi} \, d\xi$$
$$= \frac{1}{S r^{d-1}} \int_{S(r)} \nabla u(\xi) \, \frac{\vec{\xi}}{\|\xi\|} \, d\xi = \frac{1}{S r^{d-1}} \int_{S(r)} \vec{\nabla} u \cdot \vec{d\sigma}.$$

3. Par la formule de la divergence (car ∇u est de classe C^1)

$$m'(r) = \frac{1}{S r^{d-1}} \int_{B(r)} \mathrm{div}(\nabla u)\, d\lambda = \frac{1}{S r^{d-1}} \int_{B(r)} \Delta u \; d\lambda$$

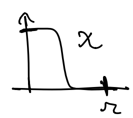
4. Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2.

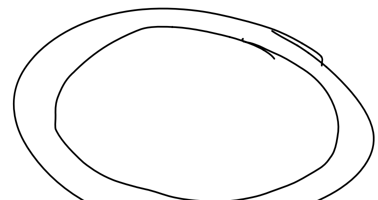
- Supposons u harmonique sur Ω, $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$.
Alors la fonction $v(x) := u(rx + x_0)$ est définie sur $B(1)$, de classe C^2, et vérifie $\Delta v(x) = r^2 \Delta u = 0$ Donc v est harmonique sur $B(1)$.

Alors $m(u, S(x,r)) = m(v, S(x,1)) = v(0) = u(x)$.

Donc u vérifie la propriété de la moyenne.

7. 8: On veut à présent montrer que si $u \in C^0(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne alors $u \in C^\infty(\Omega)$ et $\Delta u = 0$.
On définit $\Omega_r := \{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > r \}$
$\rho : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie
$\rho(x) = \chi(\|x\|)$





χ est choisie telle que ρ est d'intégrale 1, et χ est C^∞

Alors $\rho * u : \Omega_r \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et

$$\rho * u(x) = \int_{B(0,r)} u(x-y)\, \rho(y)\, dy$$

$$= \int_{B(0,r)} u(x+y)\, \rho(y)\, dy \quad (\text{car } \rho(t) = \rho(-t))$$

$$= \int_0^r \left(\int_{S(t)} u(x+\xi)\, \rho(\xi)\, d\xi \right) t^{d-1} dt$$

$$= \int_0^r \left(\int_{S(t)} u(x+\xi)\, d\xi \right) \chi(t)\, t^{d-1} dt \quad (\text{car } \rho(\xi) = \chi(\|\xi\|))$$

$$= \int_0^r u(x)\; \mu(S(t))\, t^{d-1}\, \chi(t)\, dt$$

$$= u(x) \int_0^r \left(\int_{S(t)} \rho(\xi)\, d\xi \right) t^{d-1}\, dt$$

$$= u(x) \int_B \rho(y)\, dy = u(x)$$

□