Théorie Hilbertienne, examen de seconde session, du 28 aout 2019

Exercice 1 : Espaces de Sobolev. Soit $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle que l'élément de volume dans la boule est $\rho d\rho d\xi$ où ρ est la coordonnée radiale, et $d\xi$ est l'élément de volume sur S^{n-1}.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une application continue Tr : $W^{1,p}(B) \to L^p(\partial B)$ qui coïncide avec la restriction sur les fonctions de $\mathcal{C}^1(\overline{B})$. On fixe donc $p \geq 1$.

1. Que peut-on dire de l'inclusion $\mathcal{C}^1(\overline{B}) \subset W^{1,p}(B)$.
2. Montrer qu'il existe une constante C_1 qu'on explicitera, telle que
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(B), \qquad \|f\|_{L^1(B)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(B)}.$$

On considère à présent une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$.

3. Montrer qu'il existe $r_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ et une constante C_2 (en fait $C_2 = 1$ convient) tels que
$$\int_{S^{n-1}} |u(r_0\xi)|^p d\xi \leq C\|u\|_{L^p}^p.$$
4. Montrer que
$$|u(r_0\xi) - u(\xi)| \leq \int_{r_0}^1 \|\nabla u(\rho\xi)\| d\rho.$$
5. En déduire que
$$\int_{S^{n-1}} |u(\xi) - u(r_0\xi)|^p d\xi \leq C\|\nabla u\|_{L^p}^p,$$
où C est une constante qu'on explicitera.
6. En déduire qu'il existe une constante C_3, qu'on pourra déterminer, telle que
$$\forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{B}), \|u_{|\partial B}\|_{L^p(\partial B)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(B)}.$$
7. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} & : & C^1(\overline{B}) & \longrightarrow & L^p(\partial B) \\ & & u & \longmapsto & u_{|\partial B} \end{array}$$
se prolonge en un opérateur continu Tr : $W^{1,p}(B) \to L^p(\partial B)$.

Exercice 2 : Formulation faible. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à bord lisse, et $\kappa \in \mathbb{R}$ une constante.

1. Ecrire la formulation faible du problème suivant :
$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \\ \Delta u + \kappa u = 0, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$
2. Rappeler les énoncés du lemme de Poincaré et du théorème de Lax-Milgram.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \kappa \geq -C$, le problème faible n'admet que 0 comme solution.