Probleme de Sturm Liouville avec conditions aux limites.

13 janvier 2020

Espace de Sobolev $H_0^1([0,1])$

Exercice 3 : Définition. Soit les espaces :

$$H^1([0,1]) = \left\{ u \in L^2([0,1]), \exists g \in L^2([0,1]) \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[), \int_0^1 g\phi d\lambda = \int_0^1 u\phi' d\lambda \right\},$$
$$\mathcal{H}([0,1]) = \{u \in C^0([0,1]) | \exists g \in L^2([0,1]) \text{ tel que } u(x) = u(0) + \int_0^x g\, d\lambda \text{ sur } [0,1]\}.$$

On définit $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$ On admettra que $C^\infty(]0,1[)$ est dense dans $H^1([0,1])$.

1. Montrer que $\mathcal{H}([0,1]) \subset H^1([0,1])$.
2. Montrer que si $u \in H^1([0,1])$ est $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $\|u\|_{H^1} \leq 1$, alors on a
$$\forall x, y \in [0,1], \qquad |u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}.$$
3. En utilisant la densité de $\mathcal{C}^\infty(]0,1[)$ dans $H^1([0,1])$, montrer que si $u \in H^1([0,1])$, u est continue, puis que $H^1([0,1]) = \mathcal{H}^1([0,1])$.

En résumé, $H^1([0,1])$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ dont la dérivée au sens des distributions (g dans la définition ci-dessus) est L^2. On notera Du cette dérivée. Par conséquent, l'espace $H_0^1([0,1] = \{u \in H^1([0,1]), u(0) = u(1) = 0\}$ est bien défini et c'est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1([0,1])$.

Exercice 4 : Inégalité de Poincaré. Montrer que $\|Du\|_{L^2}$ définit une norme sur $H_0^1(]0,1[)$ équivalente à la norme $\|u\|_{L^2} + \|Du\|_{L^2}$. Indication : commencer par établir une inégalité pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ en utilisant les séries de Fourier.

Equation de Sturm Liouville.

Soit $p \in C^1([0,1]), p \geq \alpha > 0,\ q \in C^0([0,1]), q \geq 0,\ f \in C^0(]0,1[) \cap L^2(]0,1[)$.
Problème de Sturm-Liouville : $\exists! u \in C^2(]0,1[) \cap C^0(]0,1[)$ telle que :

$$(*) \begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1. Etablir l'unicité par un principe du maximum.
2. Montrer que la fonctionnelle $J : H_0^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par
$$J(u) = \int_0^1 p\,|Du|^2 d\lambda + \int_0^1 q\,|u|^2 d\lambda - \int_0^1 f\,u d\lambda$$
est convexe, continue et coercive.

3. On admettra qu'une fonctionnelle convexe continue et coercive sur un espace de Banach admet un unique minimimum (cf. TD2). Montrer qu'il existe un élément u de $H_0^1([0,1])$ tel que :

$$\int_0^1 (p\, Du\, Dv + q\, u\, v - f\, v) d\lambda = 0 \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[)$$

On cherche à présent à démontrer la régularité de la solution $u \in H_0^1([0,1])$ que l'on vient de trouver : on veut démontrer qu'elle est $\mathcal{C}^2$.

4. Montrer que la fonction $v := pDu \in L^2([0,1])$ a une dérivée continue au sens des distributions : il existe $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1])$,

$$\int_0^1 vD\phi d\lambda = \int_0^1 g\phi d\lambda.$$

5. On pose $\tilde{v}(x) := \int_0^x g(t)dt$. Montrer que v est une fonction $\mathcal{C}^1$, et que $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$,

$$\int (v - \tilde{v})\phi' = 0.$$

6. En déduire que $v - \tilde{v}$ est une fonction constante, donc que v a un resprésentant $\mathcal{C}^1$.
7. En déduire que pDu est $\mathcal{C}^1$, puis que Du est $\mathcal{C}^1$, et enfin que u est $\mathcal{C}^2$.
8. En déduire que le représentant $\mathcal{C}^2$ de u est une solution de $(*)$