Outils Hilbertiens : Topologie faible, Lax-Milgram, minimisation de fonctionnelles convexes

Exercice 1 : Théorème de Lax-Milgram Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive. Cela signifie que :

- $(u, v) \mapsto a(u, v)$ est linéaire en les deux variables,
- Il existe $C > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ (le démontrer éventuellement),
- Il existe $\alpha > 0$ telle que $|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|^2$. Il s'agit en fait d'une coercivité forte. Un coercivité plus faible (ne convenant pas à cet exercice), consiste à demander que $a(u, u)$ tende vers $+\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}(H, H)$ (linéaire continue) telle que $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$.
2. Montrer que $\|Av\| \geq \alpha\|v\|$, et en déduire que A est injective.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ est fermée.
4. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ est dense.
5. en déduire que A est bijective.
6. En déduire le théorème de Lax-Milgram : sous les hypothèses de l'exercice, $\forall\varphi \in H^*$, il existe $u \in H$ telle que
$$\forall v \in H, \qquad a(u, v) = \varphi(v)$$
7. On suppose à présent a symétrique. Montrer que la fonction
$$\begin{array}{rccl} J & : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & a(v, v) - \varphi(v) \end{array}$$
est convexe, dérivable, de dérivée $J'(v)\xi = a(v, \xi) - \varphi(\xi)$. En déduire que l'élément u trouvé dans la question précédente est un minimum de J.
8. **Application :** On admettra le théorème de Poincaré : si Ω est un domaine bornée de $\mathbb{R}^d$, la norme $\|\vec{\nabla}u\|_{L^2(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$ est équivalente à la norme de Sobolev. Montrer que $\forall g \in L^2(\Omega)$, il existe un unique élément $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle d\lambda = \int_\Omega gv d\lambda$$

Exercice 2 : Théorème de Hahn-Banach géometrique. Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H.

1. Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe un unique $y \in C$ vérifiant $d(x, y) = d(x, C)$. (On admettra l'identité du parallélogramme : si $\|\dot{\|}$ dérive d'un produit scalaire alors $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$).
2. En déduire que si $x \notin C$, alors il existe une forme linéaire L et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall y \in C$, $L(x) < \lambda \leq L(y)$ (séparation d'un convexe et d'un point).
3. En déduire que si C est un convexe fortement fermé, alors C est faiblement fermé. Rappel : ceci signifie que si $(x_n) \in C$, et $x \in H$ vérifient que $\forall h \in H$, $\langle x_n, h\rangle \to \langle x, h\rangle$, alors $x \in C$.

Exercice 3 : Minimisation de fonctions convexes. On reprend les hypothèses et notations de l'exercice précédent. Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, fortement semi-continue inférieurement (ou continue). On rappelle qu'une fonction est semi-continue inférieurement si

$$\forall x \in H,\ \forall (x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, \qquad J(x) \leq \liminf J(x_n).$$

1. Montrer que J est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe $\mathrm{Epi}\,(J) := \{(x,\alpha) \in H \times \mathbb{R} \mid J(x) \leq \alpha\}$ est fermé.
2. En déduire que sous l'hypothèse de l'exercice, $\mathrm{Epi}\,(J)$ est un convexe fermé fort. En déduire que J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible.
3. Supposons à présent que J tend vers $+\infty$ à l'infini. Montrer que J admet un minimum sur H. On rappelle que les boules de H sont compactes pour la convergence faible : si $(x_n) \in B_H(1)$, il existe $x \in H$ et une sous-suite x_{α_n} qui vérifient $\forall h \in H$, $\langle x_{\alpha_n}, h\rangle \to \langle x, h\rangle$.
4. **Application :** donner une autre preuve du théorème de Lax-Milgram lorsque a est symétrique.

Exercice 4 : Les boules d'un espace de Hilbert sont compactes pour la topologie faible. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $x_n \in H$ converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\forall \varphi \in H, \quad \langle x_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle x, \varphi\rangle.$$

On veut démontrer le résultat suivant :

De toute suite x_n bornée dans H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Soit donc x_n une suite de $B_H(0,R)$. On commence par supposer que H est séparable (c'est le cas de tous les espaces de Sobolev).

1. Montrer que H possède une base Hilbertienne, c'est-à-dire une famille orthonormée dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui engendre un sous-espace dense dans H. On pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).
2. Par un argument d'extraction diagonale, montrer qu'il existe une sous-suite x_{n_k} telle que
$$\forall i, \quad \langle x_{n_k}, e_i\rangle \longrightarrow \alpha_i.$$
3. Montrer que $\forall n$, $\sum \langle x_{n_k}, e_i\rangle^2 \leq R$.
4. En déduire que $\sum_0^\infty \alpha_i e_i$ est une série convergente. On appelle x sa limite.
5. Montrer que $\langle x_{n_k}, e_i\rangle \longrightarrow \langle x, e_i\rangle$.
6. En déduire que x_{n_k} converge faiblement vers x.

On ne suppose plus que H est séparable. On appelle $F := \overline{\mathrm{Vect}\,\langle x_n\rangle} \subset H$.

7. Montrer que F est un espace de Hilbert séparable qui contient la suite (x_n).
8. En déduire qu'il existe une sous-suite x_{n_k} et $x \in F$ qui vérifient :
$$\forall \varphi \in F, \quad \langle x_{n_k}, \varphi\rangle \longrightarrow \langle x, \varphi\rangle,$$
c'est-à-dire que x_{n_k} converge faiblement vers x *dans* F.
9. En utilisant la décomposition $H = F \oplus F^\perp$, montrer que x_{n_k} converge faiblement vers x dans H.