Résolution faible du Laplacien sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec conditions de Dirichlet

On s'intéresse dans ce TD à la formulation faible et à la résolution faible du problème suivant :

Etant donné un ouvert borné à bord lisse $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, une fonction g de régularité à déterminer, trouver une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u = g & \text{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Comme on s'intéresse à la résolution faible dans ce problème, on considère ici $g \in L^2(\Omega)$.

Exercice 1 : Formulation faible du problème $(*)$. On rappelle que $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$, et que si $\vec{X}$ est un champ de vecteurs lisse sur un domaine $\overline{D}$ à bord lisse, alors

$$\int_D \operatorname{div} \vec{X} d\lambda = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \vec{N} d\sigma,$$

où $\vec{N}(x)$ est la normale sortante à $\partial\Omega$ en x et $d\sigma(x)$ est la mesure $d-1$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Montrer que

$$\int_\Omega \varphi \Delta u d\lambda = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi d\lambda$$

2. Montrer que si u est solution de notre problème $(*)$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$(*)_{\text{weak}} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi d\lambda + \int_\omega g\varphi d\lambda = 0.$$

On pose

$$\begin{array}{rcccl} a & : & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\lambda \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda & : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \int_\Omega g v d\lambda. \end{array}$$

3. Montrer que a est une forme bilinéaire continue positive (c'est-à-dire $a(u,u) > 0$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$) et que Λ est une forme linéaire continue.

On admet temporairement l'inégalité de Poincaré :

Lemme (de Poincaré)**.** *Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, les normes $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$.*

4. Montrer que la fonctionnelle a est coercive.
5. Montrer que l'équation $(*)_{\text{weak}}$ a une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$, qu'on appellera dans la suite *la solution faible de* $(*)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

6. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, u vérifie $\Delta u = g$ (et en particulier, $g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$).

On admet temporairement le résultat suivant :

Lemme (de Trace)**.** *Si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$, et un opérateur continu Tr: $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ tel que si $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, Tr$(f) = f_{|\partial\Omega}$.*

7. Montrer que si $f \in H_0^1(\Omega)$ alors $\mathrm{Tr}(f) = 0 \in L^2(\Omega)$.
8. En déduire que si la solution faible u de $(*)$ est dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ alors $u_{|\partial\Omega} = 0$.
9. En déduire finalement que si la solution faible u de $(*)$ est dans $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, alors u est une solution forte.

Espaces de Sobolev

Exercice 2 : Traces. Le but de cet exercice est de montrer que la solution faible trouvée dans l'exercice 1 vaut 0 sur $\partial\Omega$. On admettra le résultat de géométrie différentielle suivant. Pour un domaine borné Ω à bord lisse, il existe

- Un voisinage V de $\partial\Omega$ dans $\overline{\Omega}$,
- Un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ $\Phi : \partial\Omega \times [0,1) \longrightarrow V$ tel que $\Phi(\partial\Omega \times \{0\}) = \partial\Omega$.
- Une mesure de Lebesgue $d\xi$ sur $\partial\Omega$. Ceci signifie qu'il existe une fonction $c(\xi, t)$: $\partial\Omega \times [0,1) \to \mathbb{R}_*^+$ continue telle que $\forall f \in \mathcal{C}^0(V)$,

$$\int_V f d\mathcal{L}eb = \int_{\partial\Omega} \int_0^1 f \circ \Phi(\xi, t) c(\xi, t) d\xi dt.$$

On a de plus un théorème de Fubini sur $\partial\Omega \times [0,1)$: $\int_t \int_\xi = \int_\xi \int_t$. On considère dans les questions 1-4 suivantes une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\tilde{u} := u \circ \Phi : \Omega \times [0,1) \to \mathbb{R}$. On considère également $p \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $t_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{u}(\xi, t_0)|^p d\xi < \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

2. Montrer que

$$|\tilde{u}(t_0, \xi) - \tilde{u}(0, \xi))| \leq \int_0^{t_0} \|\nabla \tilde{u}(t, \xi)\|_2 dt.$$

3. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{L^p(\partial\Omega)} - \|\tilde{u}(t_0, \cdot)\|_{L^p(\partial\Omega)} \right| \leq \left(\int_{\partial\Omega \times [0,t_0]} \|\nabla \tilde{u}\|_2^p \, dt d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\partial\Omega \times [0,t_0]} \|\nabla u\|_2^p \circ \Phi \, dt d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. Montrer que

$$\int_{\partial\Omega \times [0,t_0]} \|\nabla u\|^p \circ \varphi \, dt d\xi \leq \frac{1}{\min_{\partial\Omega \times [0,t_0]} c} \int_V \|\nabla u\|^p.$$

5. En déduire qu'il existe une constante K indépendante de u telle que

$$\|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

6. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} & : & \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & L^p(\partial\Omega) \\ & & u & \longmapsto & \tilde{u}(0,\cdot) \end{array}$$

se prolonge en un opérateur continu Tr: $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$.

7. Montrer que $W_0^{1,p}(\Omega) = \ker \mathrm{Tr}$.
8. En reprenant la preuve de la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, il existe $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge à la fois vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$ et dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.
9. En déduire que si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $\mathrm{Tr}(u) = u_{|\partial\Omega} \circ \Phi$.

Exercice 3 : Inégalité de Poincaré. On commence par l'inégalité de Poincaré en dimension 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ telle que $f, f' \in L^2([0, 2\pi])$.

1. Rappeler les relations entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f'. Montrer que $(c_i(f)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
2. On suppose (pour cette question seulement) que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\|f\|_{L^2([0,2\pi])} \leq \|f'\|_{L^2([0,2\pi])}.$$

3. On suppose maintenant que $f(0) = 0 = f(2\pi)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = 0$, puis que

$$|a_0| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \|f'\|_{L^2([0,2\pi])}.$$

4. En déduire que $\|f\|_{L^2([0,2\pi])} \leq (1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}})\|f'\|_{L^2([0,2\pi])}$.

Soit à présent $f \in \mathcal{C}^1([0, R])$ telle que $f(0) = f(R) = 0$.

5. Montrer qu'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^2([0,R])} \leq CR\|f'\|_{L^2([0,R])}.$$

On est alors en mesure de prouver l'inégalité de Poincaré en dimension quelconque. Soit $\Omega \subset \{0 \leq x_1 \leq R\} \subset \mathbb{R}^d$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Montrer que

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq CR\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

7. Montrer que la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à la norme de Sobolev $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H_0^1(\Omega)$.