TD 6: L'équation de la chaleur

Le but de l'étude à suivre est de comprendre l'équation qui gouverne l'évolution temporelle de la chaleur dans un domaine à bord lisse : Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à bord lisse, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ doit vérifier

$$\mathcal{C}(\Omega, u_0) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \forall x, t \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

On rappelle le résultat obtenu dans le TD précédent : si Ω est borné à bord lisse, il existe une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres du Laplacien. Ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et nulles au bord. Les valeurs propres forment un ensemble dénombrable disret de $\mathbb{R}_*^+$, que l'on note λ_n, et on note les fonctions propres correspondantes dans la base Hilbertienne φ_n. Finalement, il existe une suite $c_k \in \mathbb{R}$ telle que $\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} \leq c_k \lambda_n$.

On écrit $u_0 := \sum_{n=0}^\infty a_n \varphi_n$ la décomposition de u_0 selon la base Hilbertienne (φ_n) (donc $a_n = \langle u_0, \varphi_n \rangle$).

Exercice 1 : Unicité de la solution

1. Montrer que si f vérifie $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$, alors
$$\int_\Omega \frac{\partial f^2}{\partial t}(x,t)dx \leq 0.$$
2. En déduire que si f est solution de $\mathcal{C}(\Omega, 0)$, alors $f = 0$.
3. En déduire l'unicité de la solution à l'équation $\mathcal{C}(\Omega, u_0)$.

Exercice 2 : Argument formel

1. Calculer la solution du problème $\mathcal{C}(\Omega, \varphi_n)$.
2. En déduire un candidat solution au problème $\mathcal{C}(\Omega, u_0)$.

Exercice 3 : L'analyse. On pose $u_N(x,t) := \sum_0^N a_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x)$. On pose de façon générale pour $f \in L^2(\Omega)$,
$$a_n(f) := \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}$$

1. Montrer que $a_n \in \ell^2(\mathbb{R})$, puis que la suite u_n converge uniformément sur $[a, +\infty) \times \Omega$. En déduire que la fonction limite u est continue.
2. Montrer que la fonction u est $\mathcal{C}^1$ en temps et $\mathcal{C}^\infty$ en espace sur $[A, +\infty) \times \Omega$, et donc sur $\mathbb{R}_*^+ \times \Omega$.
3. Montrer que u vérifie $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t)$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \Omega$.
4. Montrer que $u(\cdot, t) \xrightarrow[t \to 0]{L^2(\Omega)} u_0$.
5. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, on a $a_n(\Delta f) = -\lambda_n a_n(f)$.
6. En déduire que si $u_0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, on a $|a_n| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_i^2} + a_i^2\right)$.
7. En déduire que si $\lambda_n \geq Cn$, alors $u(\cdot, t) \xrightarrow[t \to 0]{\mathcal{C}^0(\Omega)} u_0$