Analyse réelle

Objectifs : La feuille d'exercice ci-après présente sous forme d'exercices les propriétés principales que vous devez connaitre sur $\mathbb{R}$, les fonctions, les suites, ...Vous êtes censés avoir rencontré la plupart de ces exercices plus tôt dans votre scolarité, cette fiche est une révision. Si vous n'arrivez pas à résoudre un exercice, vous pouvez vous reporter à vos différents cours.

Finalement, sauf exercices particuliers dans lesquels on demande de redémontrer un théorème classique d'analyse, vous pouvez évidemment utiliser toute la panoplie des théorèmes de vos cours d'analyse.

1 Nombres réels : propriétés ensemblistes et algébriques

Exercice 1 :

1. Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Indication : Raisonnez par contradiction, énumérez alors les éléments de $[0,1]$ et écrivez leur développement décimal. Construisez alors un nombre par son développement décimal qui n'est pas dans la liste.
2. En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}$ (on rappelle que ces nombres sont les racines des polynômes à coefficients entiers).

Exercice 2 : Construction d'un nombre transcendant

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ un nombre algébrique de degré d. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$,
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$
2. En déduire une suite α_n de nombres entiers telle que
$$\sum_n 10^{-\alpha_n}$$
est un nombre transcendant.

Exercice 3 : Morphismes de $\mathbb{R}$

1. Montrer qu'un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité. Indication : On vérifie aisément que c'est l'identité sur $\mathbb{Q}$. Montrer alors qu'un tel morphisme est croissant pour déduire la continuité.
2. Montrer qu'un morphisme de groupe continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ est une homotétie. Qu'en est-il si on omet l'hypothèse de continuité ?
3. Montrer qu'un morphisme continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est de la forme $x \mapsto a^x$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 : Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}^+$ est soit un réseau (du type $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$), soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifies $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. En admettant que $\pi \notin \mathbb{Q}$, en déduire que l'ensemble $\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

La suite de l'exercice consiste en une précision du résultat précédent : on cherche à comprendre la distribution des $\cos n$ dans $[-1,1]$. On considère $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit T_N :

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\alpha} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. En déduire que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt.$$

6. En déduire que pour tout intervalle de $I \subset [0, 2\pi]$, $\dfrac{1}{N}\#\{n \mid n\alpha \in I\} = \ell(I)$.

2 Suites et séries numériques

Exercice 5 : Théorème de Bolzano-Weirstrass

1. Montrer qu'une suite réelle dans $[0,1]$ a une valeur d'adhérence. Indication : utiliser une dichotomie pour produire une sous-suite de Cauchy.
2. En déduire qu'une suite vectorielle dans $[-1,1]^n$ admet une valeur d'adhérence.
3. En déduire que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ puis que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, puis que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Indication : On commencera par montrer qu'une norme quelconque est toujours Lipschitzienne vis-à-vis de la norme infinie.

Exercice 6 : Résultats classiques

1. Montrer que les valeurs d'adhérence d'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $|x_{n+1} - x_n| \to 0$ est un intervalle.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n \text{ existe mais } \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} |u_n| = +\infty.$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\lim\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} = x$.

Exercice 7 : Soit (u_n) une suite réelle positive, et (v_n) une suite réelle telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors

$$\Sigma_{k=0}^{n} u_k \sim \Sigma_{k=0}^{n} v_k.$$

Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors

$$\Sigma_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \Sigma_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Exercice 8 : Séries de Riemann. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante qui tend vers 0 à l'infini. On pose $S_N := \sum_{n=0}^{N} f(n)$ et $R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(t)dt \leq \sum_n = 0^{N-1} f(n)$$
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
3. Si $\int_0^{\infty} f(t)dt$ diverge, montrer que $S_N \sim \int_0^N f(t)dt$.
4. Si $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge, montrer que $R_N \sim \int_N^{\infty} f(t)dt$.
5. En déduire que $\sum_1^N \frac{1}{n} \sim \ln(N)$ et que $\sum_N^{\infty} \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{4N^4}$

Exercice 9 : Développements asymptotiques

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une solution unique x_k dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour tout k.
2. Montrer que $x_k - (\frac{\pi}{2} + k\pi)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
3. Donner un développement asymptotique de x_k quand k tend vers l'infini.

Exercice 10 : Convergence d'une suite itérative vers un point fixe Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ qui vérifie $f(0) = 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = f()x_n$.

1. On suppose que $x_n \longrightarrow 0$. Montrer que $|f'(0)| \leq 1$.

On suppose à présent que $|f'(0)| < 1$. On souhaite étudier la rapidité de convergence de la suite x_n vers 0 si x_0 est suffisamment proche de 0.

2. Montrer qu'il existe $\Delta > 0$ tel que $\forall x_0 \in [-\Delta, \Delta]$, $x_n \longrightarrow 0$.
3. Montrer qu'il existe $0 < \lambda < 1$ tel que si $x_0 \in [-\Delta, \Delta]$, $|x_n| \leq \lambda^n$.
4. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 de f en 0, montrer que si $x_0 \in [-\Delta, \Delta]$,
$$\ln|x_{n+1}| - \ln|x_n| = \ln|f'(0)| + R_n(x_0), \text{ avec } |R_n(x_0)| \in O(\lambda^n).$$
Montrer aussi qu'il existe $R_n \in O(\lambda^n)$ tel que $|R_n(x_0)| \leq R_n$ pour tout $x_0 \in [-\Delta, \Delta]$.
5. En déduire que si $x_0 \in [-\Delta, \Delta]$, il existe une constante $C(x_0)$ telle que
$$|x_n| \sim C(x_0)|x_0||f'(0)|^n.$$
Et montrer que $|C(x_0)|$ est bornée sur $[-\Delta, \Delta]$.

On suppose à présent que $f'(0) = 1$. On souhaite mener la même analyse que précédemment. On suppose que f a un développement limité en 0 du type
$$f(x) = x - ax^p + o(x^p),$$
avec $a \neq 0$.

6. Discuter de la convergence vers 0 de la suite x_n selon la parité de p et le signe de a.
7. On se place à présent dans le cas où $x_n \longrightarrow 0$. Montrer que
$$x_{n+1}^{1-p} - x_n^{1-p} \sim a.$$
8. En déduire que $x_N \sim \frac{C}{N^{\frac{1}{p-1}}}$.

3 Fonctions réelles : dérivabilité, intégration...

Exercice 11 : Théorème de Darboux. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f([a, b])$ est un intervalle.

Exercice 12 : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(x) \underset{x \to a}{\ell} \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f s'étend par continuité en a.
2. Montrer que f est dérivable en a, de dérivée ℓ. Indication : Théorème de Taylor-Young.

Exercice 13 : Développements limités *vs* développements en série entière Trouver une fonction dont le développement limité en 0 est nul, mais qui n'est pas nulle.

Exercice 14 : Théorème de Borel. Soit (a_n) une suite de nombres réels. On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.

1. On suppose $a_n \leq C^n$ pour un certain nombre $C > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$, et que $f^{(n)}(0) = a_n$.

On suppose à présent (a_n) quelconque. Soit $\chi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et 0 sur $\mathbb{R} \backslash [-1, 1]$, et on définit $M_m := \max\{\|\chi^{(k)}\|_\infty,\ k \leq m\}$. On fixe $\varepsilon_n > 0$ et on définit $\varphi_n(x) := \chi(\frac{x}{\varepsilon_n}) a_n \frac{x^n}{n!}$.

2. Montrer que $\|\varphi_n^{(m)}\|_\infty \leq |a_n| \sum_{k=0}^m C_k^m \|\chi_n^{(k)}\|_\infty \varepsilon_n^{n-k} \leq |a_n| M_m \varepsilon_n^{n-m}$. (On remarquera que pour $x \geq \varepsilon_n$, $\varphi_n \equiv 0$).
3. En déduire que pour un bon choix de ε_n, $\sum_{n=0}^\infty \|\varphi_n^{(m)}\|_\infty < +\infty$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $f := \sum_{n=0}^\infty \varphi_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(k)}(0) = a_k$.

Exercice 15 : Dérivation sous le signe intégral. Le but de cet exercice est de vous faire démontrer les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre. Vous pouvez donc essayer d'énoncer et de démontrer ces théorèmes. Si vous n'y arrivez pas, faites l'exercice ci-dessous.

Soit $f : [0, 1]_t \times I_x \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\forall t$, $f(t, \cdot)$ est intégrable sur I. On pose

$$g(t) := \int_I f(t, x) dx.$$

1. Trouver une hypothèse qui permette d'appliquer le théorème de convergence dominée, et garantir que
$$\int_I f(t, x) dx \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \int_I f(t_0, x) dx$$
2. Montrer que si $|f(t, x)| \leq \rho(x)$ où $\rho : I \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, alors g est continue sur $[0, 1]$.

On suppose maintenant que f est dérivable en t_0.

3. Calculer $g(t_0+\delta) - g(t_0)/\delta$. Sous quelle hypothèse peut-on appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer la convergence de cette quantité vers
$$\int_I \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx$$
lorsque δ tend vers 0.

4. En utilisant le théorème de Taylor-Young, montrer que si $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe sur $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, alors $\forall x$, $\forall |\delta| < \varepsilon$,
$$\frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0} = f'(c(x),x),$$
où $c(x) \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$.
5. En conclure que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en t et qu'il existe $\rho : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \rho(x), \qquad \forall x,$$
Alors g est dérivable sur I, de dérivée
$$\int_I \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$$

4 Suites de fonctions

Exercice 16 : Régularité des limites. Soit $\alpha_n \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est continue et que les α_n sont les coefficients de Fourier de f.
2. On suppose que $\alpha_n \in o(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On suppose que $\alpha_n \in o(\frac{1}{n^{k+\varepsilon}})$, $k \geq 2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Exercice 17 : Théorème d'Ascoli Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions bornées et uniformément équicontinues. On veut trouver une sous-suite de f_n qui converge uniformément sur $[0,1]$. Soit x_n une suite dense dans $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi(n)$ telle que $f_{\varphi(n)}(x_k)$ converge pour tout k. On note α_k sa limite. Indication : extraction diagonale.
2. Montrer que l'application $x_k \mapsto \alpha_k$ est uniformément continue. En déduire que celle-ci se prolonge en une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
3. Montrer que $f_{\varphi(n)}$ converge uniformément vers f.

Exercice 18 : Régularisation par convolution On fixe dans cet exercice une approximation de l'unité $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$:

- χ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout n,
- $\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$ pour tout n,
- $\operatorname{Supp} \chi_n \subset [-\delta_n, \delta_n]$ où $\delta_n \to 0$.
- Le point précédent peut être remplacé par l'hypothèse alternative
$$\forall \delta > 0, \qquad \int_{[-\delta,\delta]} \chi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Nous ne le considèrerons cependant pas dans cet exercice.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe L^1. Montrer que $f_n := \chi_n \star f_n$ est bien définie sur $[\delta_n, 1-\delta_n]$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que f_n converge vers f dans L^1.
2. On suppose à présent f continue. Montrer que f_n converge uniformément vers f.
3. Réfléchir à comment adapter nos données pour obtenir des fonctions définies sur $[0,1]$ et qui convergent dans L^1 ou uniformément vers f. Indication : prolonger f.
4. Reprendre votre preuve préférée du théorème de Weierstrass.

5 Polynômes

Exercice 19 : Relation coefficients racines. On suppose qu'un polynome P d'une variable réelle de degré n admet n racines distinctes. Montrer qu'il existe $n+1$ fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $c_0, a_1, \dots a_n$ définies sur un voisinage de P dans $\mathbb{R}^n[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour Q dans ce voisinage, on ait $Q(X) = c_0(Q)(X - a_1(Q)) \dots (X - a_n(Q))$. Indication : on pourra inverser la relation coefficients-racines localement autour des coefficients de P.

Exercice 20 : Polynômes de Tchebycheff. Soit T_n la suite de polynômes définie par : $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Le polynôme T_n est donc de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

1. Vérifier que $T_n(\cos x) = \cos nx$. En déduire le graphe de T_n sur $[-1, 1]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leq 1$. Montrer que le coefficient dominant de P est inférieur ou égal à 2^{n-1}, avec égalité si et seulement si $P = T_n$.
3. En déduire qu'un polynôme unitaire ne peut être inférieur à 2 que sur des intervalles de longueur inférieure à 4 (théorème de Polyá).

Exercice 21 : Théorème de Polyá [?]. On veut montrer que tout polynôme unitaire P vérifie $\mu(\{|P| \leq 2\}) \leq 4$ (μ désigne la mesure de Lebesgue). L'exercice précédent montre que chaque intervalle contenu dans $\{|P| \leq 2\}$ est de longueur inférieur à 4. On suppose dans un premier temps que P a toutes ses racines réelles. On écrit alors

$$\{|P| \leq 2\} = I_1 \cup \dots \cup I_t,$$

où les I_t sont des intervalles disjoints, et $I_1 \leq I_2 \leq \dots \leq I_t$.

1. Montrer que chaque I_j contient au moins un zéro de P.
2. On note $a_1, \dots, a_m$ les zéros de P dans $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$ et $b_1, \dots, b_k$ les zéros de P dans I_t. On note aussi d la distance entre I_{t-1} et I_t. Montrer que le polynôme unitaire
$$Q(X) := (X - a_1) \dots (X - a_m)(X - b_1 + d) \dots (X - b_k + d)$$
vérifie $\{|Q| \leq 2\} \supset I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t - d)$.
3. Conclure.

On suppose à présent que $P \in \mathbb{R}[X]$, toujours unitaire, a cette fois des racines complexes. Donc P s'écrit

$$P(X) = (X - z_1)(X - \overline{z_1}) \dots (X - z_m)(X - \overline{z_m})(X - a_1) \dots (X - a_k),$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, $z_j \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, et des multiplicités sont possibles.

4. Montrer que le polynôme unitaire réel $Q(X) := (X - \mathrm{Re}\,(z_1))^2 \dots (X - \mathrm{Re}\,(z_m))^2 (X - a_1) \dots (X - a_k)$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|Q(x)| \leq |P(x)|$.
5. Conclure.

6 Séries de Fourier

Exercice 22 : Utilisation classique des séries de Fourier Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 23 : convergence simple des séries de Fourier. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. On suppose que $S_N(f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que $f(x) = \ell$.
Indication : Théorème de Féjer.