Analyse complexe

Enjeux

Le but de ces exercices est multiple :

— La première partie regroupe l'ensemble des théorèmes de base de la théorie des fonctions holomorphes (existence de primitives, formule de Cauchy, principe du maximum,...). Ces résultats et leurs démonstrations doivent être connus. Ils sont présentés ici sous forme d'exercice justement parce que les démonstrations sont exigibles, donc susceptibles de faire l'objet d'une question lors d'un oral, ou de questions intermédiaires lors d'un écrit.

— La deuxième partie concerne les suites d'applications holomorphes. Il s'agit de comprendre comment les résultats de base (de la première partie) rendent les suites de fonctions holomorphes très particulières.

— La troisième partie donne quelques exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus.

Ces exercices peuvent tout à fait être faits avec le cours d'analyse complexe, ou un livre de référence sur le sujet à côté. Ils restent quand même des exercices, que vous devez savoir faire après vos révisions.

Beaucoup de résultats de la théorie reposent sur le théorème de Cauchy, qui lui-même repose sur la théorie de l'indice. Un résultat de base de cette théorie, dont on donne une démonstration dans la partie 4, s'énonce de la façon suivante et pourra être utilisé dans les exercices :

Théorème. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un disque. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \partial D$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} 0 \ \textit{si } z \notin D \\ 1 \ \textit{si } z \in D \end{cases}$$

1 Résultats de base

Exercice 1 : Théorème de $\frac{1}{2}$-Morera

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, et $\Delta \Subset \Omega$ un triangle. Montrer que $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
2. Montrer qu'une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sur un ouvert convexe admet une primitive holomorphe, c'est à dire une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$.

Exercice 2 : Théorème de Cauchy et applications Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non-constante. On fixe $z \in \Omega$ et on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \xi & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que φ est holomorphe sur $\Omega\backslash\{z\}$ et continue en z.
2. Montrer que si $D \Subset \Omega$ est un disque, les résultats de l'exercice précédent s'appliquent encore pour φ.
3. En déduire que si $z \in D \Subset \Omega$ (où D est un disque),

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

4. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point $z \in \Omega$, avec rayon de convergence minoré par $d(z, \partial\Omega)$.
5. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et f' est holomorphe. En déduire le théorème de Morera : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pour tout triangle $\Delta \Subset \Omega$.
6. On suppose que Ω est convexe et que f ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f = e^g$ (on appliquera le théorème de Morera à $\frac{f'}{f}$). Montrer aussi que f admet des racine p-ièmes pour tout p, c'est à dire des fonctions f_p telles que $(f_p)^p = f$.
7. Soit $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $p \geq 1$ et g une fonction holomorphe au voisinage de 0 qui ne s'annule pas en 0 tels que $f(z+h) = f(z) + h^p g(h) + o(|h|^p)$. En déduire le principe du maximum : si f n'est pas constante, $|f| : \Omega \to \mathbb{R}^+$ n'a pas de maximum.
8. Soit $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe une fonction g définie sur un voisinage de 0, vérifiant $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, et un entier $p \geq 1$, tels que $f(z+h) = f(z) + g(h)^p$. En déduire le théorème de l'application ouverte : une fonction holomorphe non constante est ouverte.

Exercice 3 : Valeurs des fonctions holomorphes Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $D \Subset \Omega$ un disque.

1. Montrer que f a un nombre fini de zéro dans D. Ils seront numérotés dans la suite $z_1, \dots, z_n$. Quitte à diminuer légèrement D, on supposera dans la suite que f n'a pas de zéro sur ∂D.
2. Montrer qu'il existe des entiers $k_1, \dots, k_n$ et une fonction holomorphe $g : D \to \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas, tels que $f(z) = g(z)\Pi(z - z_i)^{k_i}$ $\forall z \in D$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f'}{f} = \sum k_i$ (dérivée logarithmique). On pourra faire la question 1 de l'exercice 4 avant.
4. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si g est une fonction holomorphe sur Ω avec $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, le nombre de zéro de f et de g dans D, comptés avec multiplicité, coincident. Autrement dit, si $\#Z(f, D) := \sum k_i$, on a $\#Z(g, D) = \#Z(f, D)$.
5. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|h| < \varepsilon$, les nombres de solutions de l'équation $f(z) = h$ dans D, compté avec multiplicité, est constant, égal à $\sum k_i$.
6. Retrouver le théorème de l'application ouverte.
7. On suppose à présent que f est injective, et on note $\Omega' := f(\Omega)$ (donc Ω' est ouvert d'après la question précédente). Montrer que f' ne s'annule pas sur Ω, que $f : \Omega \to \Omega'$ est un difféomorphisme, puis que f^{-1} est holomorphe. On dit que $f : \Omega \to \Omega'$ est un biholomorphisme.

2 Suites de fonctions holomorphes

Exercice 4 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\Omega_\varepsilon \Subset \Omega$ l'ensemble des points à distance supérieure à ε de $\partial\Omega$.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Montrer que $\|f'\|_{\Omega_\varepsilon,\infty} \leq \varepsilon^{-1}\|f\|_\infty$.
2. Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes uniformément bornées. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite f_{n_k} qui converge uniformément sur les compacts de Ω (utiliser Ascoli sur un compact donné, puis un argument diagonal pour la convergence sur tout compact).

3. Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. Montrer que f est holomorphe et que f'_n converge uniformément vers f' sur les compacts de Ω.

Exercice 5 : Automorphismes de $\mathbb{D}$ Un automorphisme de $\mathbb{D}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

1. Montrer que $|\varphi_a(e^{i\theta})| = 1$, que $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ et que φ_a est automorphisme de $\mathbb{D}$.

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorphisme. On suppose pour l'instant que $f(0) = 0$.

2. Montrer que $|f'(0)| = 1$ (on pourra appliquer les résultats de l'exercice précédent à la suite d'applications $f^{\circ n} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$).
3. On suppose ici que $f'(0) = 1$. Montrer que $f(z) = zg(z)$ avec g holomorphe, qui vérifie $g(0) = 1$ et $|g(e^{i\theta})| = 1$. En déduire que $f(z) = z$.
4. Montrer que si f est un automorphisme qui vérifie $f(0) = 0$, $f(z) = e^{i\theta}z$.

Soit à présent $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorphisme. On ne fait à présent plus l'hyptohèse que $f(0) = 0$.

5. Montrer que $f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$.

3 Théorème des résidus et calculs d'intégrales

Exercice 6 : Calculer le résidu de $\frac{e^{iz}}{z}$ en 0 et en déduire $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 7 : Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{i(z^2 + 4z + 1)}$$

et calculer cette valeur.

Exercice 8 : Transformée de Fourier d'une Gaussienne

1. Calculer $\displaystyle\int_{\Re}^{-t^2} dt$ (Fubini).
2. Montrer que

$$\mathcal{F}(e^{-t^2})(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

4 Théorème de l'indice

Le but des deux exercices suivants est de prouver le théorème de l'indice énoncé dans le préambule.

Exercice 9 : Soit $D \subset \mathbb{C}$ un disque, $z \in \mathbb{C}$. On admettra que :

— Pour $z \in D$, on a une parametrisation de ∂D par $\theta \mapsto z + \rho(\theta)e^{i\theta}$, où ρ est une fonction $\mathcal{C}^1$ et $\theta \in [0, 2\pi)$.

— Pour $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D}$, ∂D est paramétré par $t \mapsto z + \rho(t)e^{i\theta(t)}$, avec $t \in [0, 2\pi)$ et ρ, θ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ 2π-périodiques.

1. Montrer ce que je demande d'admettre si vous le souhaitez.
2. Montrer le théorème de l'indice par calcul direct.

Exercice 10 : On s'appuiera sur le théorème de Morera. On définit pour $z \in \mathbb{C} \backslash \partial D$:

$$\operatorname{Ind}(\partial D, z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial} D \frac{d\xi}{z - \xi}$$

1. Vérifiez que vous n'avez pas utilisé ce théorème de l'indice dans la preuve du théorème de Morera. Si ce n'est pas le cas, cherchez une autre preuve du théorème de Morera.
2. Montrer qu'il suffit de montrer le théorème de l'indice pour le disque $\mathbb{D} := D(0, 1)$.
3. Montrer que $\operatorname{Ind}(\partial \mathbb{D}, 0) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{d\xi}{\xi} = 1$.

On fixe dans la suite un point $z \in \mathbb{D}$, un disque $D_z \Subset \mathbb{D}$ centré en z et un triangle T inscrit dans D_z, qui contient z dans son intérieur.

4. En découpant $\mathbb{D} \backslash T$ ou $D_z \backslash T$ en domaines convexes (et en utilisant le théorème de Morera), montrer que

$$\operatorname{Ind}(\partial D, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial T} \frac{d\xi}{\xi - z} = \operatorname{Ind}(\partial D_z, z),$$

   et conclure que pour $z \in \mathbb{D}$, $\operatorname{Ind}(\partial D, z) = 1$.
5. En utilisant l'existence de primitives pour les fonctions holomorphes sur les domaines convexes, montrer que pour $z \notin D$, $\operatorname{Ind}(\partial D, z) = 0$.