Calcul différentiel

Exercice 1 : Un échauffement. Soit $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. On suppose que $f'(0) = 1$. Est-il vrai que f est croissante sur un voisinage de 0 ?
2. On suppose à présent que f est $\mathcal{C}^1$, et que $f'(0) \neq 0$. Montrer que f définit un difféomorphisme sur un voisinage de 0. Appelons g l'inverse (local au voisinage de 0) de f. Montrer que $g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}$.
3. On suppose à présent seulement f différentiable, et f inversible au voisinage de 0. Montrer que g est différentiable en $f(0)$, de dérivée $g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}$.

Exercice 2 : Théorème d'inversion globale. Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $f = \mathrm{Id} + \varphi$, $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} < 1$. Alors f est inversible, d'inverse $\mathcal{C}^1$. On considère donc $f = \mathrm{Id} + \varphi$, $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} < 1$.

1. Montrer que f est injective.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $y = f(x)$ si et seulement si $y - \varphi(x) = x$. En appliquant le théorème du point fixe de Picard, montrer que f est bijective. On notera g son inverse.
3. Montrer qu'il existe $K < 1$ tel que $\|f(x) - f(x')\| \geq (1-K)\|x - x'\| \ \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$. En déduire que g est lipschitzienne.
4. Montrer que $f'(x)$ est un isomorphisme $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
5. Montrer que $g(f(x_0) + h') = x_0 + f'(x_0)^{-1}h' + o(\|h'\|)$. En déduire que g est différentiable, de dérivée $g'(x) = [f'(g(x))]^{-1}$, puis que g est $\mathcal{C}^1$.
6. Conclure.

On considère maintenant un cas plus général : on suppose que E, F sont des espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme d'espace de Banach, et $f = A + \varphi$, où $\varphi \in \mathcal{C}^1(E,F)$.

7. Montrer que si $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} < \|A^{-1}\|^{-1}$, f est inversible, d'inverse $\mathcal{C}^1$ (on pourra commencer par voir que la preuve précédente s'applique pour $A = \mathrm{Id}_E$).

Exercice 3 : Théorème d'inversion locale. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in \Omega$. On suppose que $f'(x_0)$ est inversible.

1. Montrer que $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varphi(h)$, avec $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$, $\varphi(0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \varepsilon$, $\|\varphi\|_{\infty, B(x_0,\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2$ et $\|\varphi'\|_{\infty, B(x_0,\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2$
3. Montrer qu'il existe une fonction $\rho_\delta : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ qui vérifie :
   - $\rho \equiv 1$ sur $[0, \varepsilon]$,
   - $\rho \equiv 0$ sur $[2\varepsilon, +\infty)$,
   - ρ est $\mathcal{C}^\infty$ (ou $\mathcal{C}^1$ si vous préférez, cela suffit pour la preuve),
   - $|\rho'(t)| < \frac{2}{\varepsilon}$.
4. Montrer que l'application $\tilde{f}(x)$définie par $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \rho(\|x - x_0\|)\varphi(x - x_0)$ pour $x \in \Omega$ et par $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pour $x \notin \Omega$ vérifie les hypothèses de l'exercice précédent, pourvu que $\varepsilon \ll 1$.
5. En déduire que $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme, puis qu'il existe un voisinage U de x_0 et V de $f(x_0)$ tel que $f : U \to V$ est un difféomorphisme.

Exercice 4 : Théorème des fonctions implicites Soit $f : \mathbb{R}^m_{(x)} \times \mathbb{R}^p_{(y)} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $d_y f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un isomorphisme en (x_0, y_0). Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x, f(x,y)). \end{array}$$

1. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que $d\Phi(x_0, y_0)$ est inversible. En déduire qu'il existe des voisinages U, V de (x_0, y_0) et $(x_0, f(x_0, y_0))$ respectivement, et un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ $\Psi : V \to U$ qui inverse Φ (c'est-à-dire $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$).
2. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Psi(x', y') = (x', h(x', y'))$.
3. Montrer que pour $(x, y) \in U$, $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ si et seulement si $y = h(x, f(x_0, y_0))$.
4. En déduire le théorème des fonctions implicites.

On considère à présent une fonction vectorielle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. On suppose que $f'(p)$ est surjective.

5. Montrer qu'il existe une décomposition $\mathbb{R}^n = \ker f'(p) \oplus F$, telle que $f'(p)_{|F} : F \to \mathbb{R}^p$ est un isomorphisme.
6. En déduire que l'ensemble $\{f = f(p)\}$ coincide localement autour de p avec le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ $\theta : p + \ker f'(p) \to p + F$. Montrer que $\theta'(p) = 0$.
7. On suppose à présent que $f(p)$ n'est pas une valeur critique de f. En déduire que $\{f = f(p)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de codimension k, tangente en p à $\ker f'(p)$.

Exercice 5 : Exterma liés Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, et $M \subset \Omega$ une sous-variété. On suppose que $f_{|M}$ a un maximum en un point p. On considère que M est donné près de p par une équation $g = 0$, où $g = (g_1, \ldots, g_k) : U \to \mathbb{R}^k$ est une submersion définie sur un voisinage U de p.

1. Montrer que $f'(p)$ s'annule sur T_pM. Réciproquement, on dit que p est un extrema relatif à M si cette condition est vérifiée.
2. En déduire que $f'(p)$ s'annule sur $\ker g'(p)$, puis qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $f'(p) = \sum \lambda_i g_i'(p)$. Indication : on notera que $f'(p)$ est une forme linéaire qui s'annule sur l'intersection des noyaux des formes linéaires $g_i'(p)$.
3. Exemple d'application : Montrer qu'une balle qui part d'un foyer d'un billard elliptique passe par l'autre foyer du billard après un rebond.

Exercice 6 : Champs de vecteurs Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On rappelle que le flot de X est l'application $\varphi_X^t(p) = \gamma(t)$, où γ est la trajectoire de X issue de p, et que c'est un difféomorphisme sur les ensembles sur lesquels il est défini.

1. On suppose que $X \equiv 0$ près de $\partial\Omega$, et que Ω est borné. Montrer que $\varphi_X^t : \Omega \to \Omega$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Soit $p, q \in \overset{\circ}{B}(0,1)$. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs sur la boule $B(0,1)$, nul près du bord, qui envoie p sur q.
3. Montrer que le groupe des difféomorphismes de Ω agit transitivement sur Ω.

Exercice 7 : Un peu sur le gradient. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On note dans cet exercice $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un champ de vecteur X sur Ω tel que $\forall p \in \Omega$, $\langle X(p), \cdot \rangle = d_p f(\cdot)$. On appelle ce champ de vecteur le gradient de f, et on le note $\vec{\nabla} f$. Montrer que les points critiques de f sont les zéros de $\vec{\nabla} f$.

2. Montrer que si $\vec{\nabla} f(p) \neq 0$, il existe un voisinage U de p tel que $U \cap \{f = f(p)\}$ est une sous-variété de M. On note dans la suite $M_c := \{f = c\} \subset \Omega$.
3. Si $\vec{\nabla} f(p) \neq 0$, montrer que $\vec{\nabla} f(p) \perp T_p M_{f(p)}$.
4. Montrer que pour tout $p \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(t) = \vec{\nabla} f(\gamma(t))$. Une telle courbe est appelée *trajectoire du gradient.* Montrer que $f \circ \gamma$ est croissante.

On suppose dans la suite de l'exercice que $\|\vec{\nabla} f\| > K > 0$ sur Ω, et on pose $X = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$. Soit $p \in \Omega$. On pose $d(p, \partial\Omega) := \delta$. Soit γ la trajectoire (maximale) du champ de vecteur X issue de p (c'est à dire $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$).

5. Calculer $\ell(\gamma_{|[0,\varepsilon]})$. Montrer que γ est bien définie sur $[-\delta, \delta]$.
6. Calculer $f(\gamma(t))$.
7. En déduire pour $c \in J := [f(p) - \frac{\delta}{K}, f(p) + \frac{\delta}{K}]$, M_c est non vide.
8. On suppose $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que pour $c \in J$, $d(p, M_c) < \frac{\|f(p)-c\|}{K}$. En déduire que $d(M_c, M_{c'}) \leq \frac{|c-c'|}{K}$.

Exercice 8 : Relation coefficients racines. On suppose qu'un polynome P d'une variable réelle de degré n admet n racines distinctes. Montrer qu'il existe $n+1$ fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $c_0, a_1, \ldots a_n$ définies sur un voisinage de P dans $\mathbb{R}^n[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour Q dans ce voisinage, on ait $Q(X) = c_0(Q)(X - a_1(Q)) \ldots (X - a_n(Q))$. On pourra inverser la relation coefficients-racines localement autour des coefficients de P.

Exercice 9 : Changement de variable.

1. Calculer le Jacobien du changement de variable des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées cylindriques, ou sphériques sur $\mathbb{R}^3$.
2. Application 1 : calculer le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\Re} -x^2 dx$.