



# Approximation hyperbolique de l'équation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM  
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Strasbourg, le 14 février 2013

# Approximation hyperbolique de l'équation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM  
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Strasbourg, le 14 février 2013

# Outline

- 1 **Modèle mathématique**
  - 1.1 Modèle simplifié de Vlasov-Poisson 1D
  - 1.2 Modèle de Vlasov-Ampère 1D
  
- 2 **Développement dans une base en vitesse**
  - 2.1 Interpolation par la méthode des éléments finis
  - 2.2 Discrétisation en vitesse de l'équation de Vlasov
  - 2.3 Calcul pratique de  $M, A, B$
  
- 3 **Méthode volumes finis**
  - 3.1 L'équation de Vlasov
  - 3.2 Le champ électrique
  
- 4 **Cas test**
  - 4.1 L'équation de transport
  - 4.2 Amortissement Landau
  - 4.3 Instabilité double faisceau













# Modèle de Vlasov-Ampère 1D

On considère aussi le modèle de Vlasov-Ampère

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \\ \partial_t E = - \int_v f v dv + \frac{1}{L} \int_x \int_v v f dv dx \end{cases} \quad (7)$$

⇒> Avantage : On peut utiliser la résolution numérique d'une simple équation différentielle.

## II. DÉVELOPPEMENT DANS UNE BASE EN VITESSE























# Quelques notations

- $C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$  : les cellules
- $x_i$  : le point centre de la cellule  $C_i$
- $\Delta x = x_{i-1/2}^n - x_{i+1/2}^n$  : pas d'espace
- $\Delta t$  : pas de temps,  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$
- $w_i^n \simeq w(x, t)$ ,  $x \in C_i$ ,  $t = t_n$  : l'approximation du vecteur  $w$  dans la cellule  $C_i$
- $(w_a, w_b) \mapsto F(w_a, w_b)$  : flux numérique

# Résoudre de l'équation de Vlasov

On considère l'équation de Vlasov réduite

$$\begin{aligned}
 M\partial_t w + A\partial_x w + EB(E)w &= 0 \\
 M\partial_t w &= -A\partial_x w - EB(E)w \\
 M\partial_t w &= -A\partial_x w + S,
 \end{aligned} \tag{23}$$

où  $S(w) = -EB(E)w$  le terme source.

Le schéma semi-discret en espace s'écrit

$$M\partial_t w_i = -\frac{F(w_i, w_{i+1}) - F(w_{i-1}, w_i)}{\Delta x} + S(w_i), \tag{24}$$

où

$$w_i(t) \simeq w(x, t), \quad x \in C_i$$

est l'approximation constante par morceaux de  $w$  dans la cellule  $C_i$ .

# Résoudre de l'équation de Vlasov

On considère les deux schémas en temps :

# Résoudre de l'équation de Vlasov

On considère les deux schémas en temps :

- Méthode d'Euler

$$M \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} = - \frac{F(w_i^n, w_{i+1}^n) - F(w_{i-1}^n, w_i^n)}{\Delta x} + S(w_i^n) \quad (25)$$

$$\Rightarrow w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (M^{-1}F(w_i^n, w_{i+1}^n) - M^{-1}F(w_{i-1}^n, w_i^n)) + \Delta t M^{-1}S(w_i^n)$$

- Méthode d'Euler améliorée (Runge-Kutta)

$$M \frac{w_i^{n+1/2} - w_i^n}{\Delta t/2} = - \frac{F(w_i^n, w_{i+1}^n) - F(w_{i-1}^n, w_i^n)}{\Delta x} + S(w_i^n), \quad (26)$$

$$M \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} = - \frac{F(w_i^{n+1/2}, w_{i+1}^{n+1/2}) - F(w_{i-1}^{n+1/2}, w_i^{n+1/2})}{\Delta x} + S(w_i^{n+1/2}). \quad (27)$$



# Résoudre de l'équation de Vlasov

## Flux numériques

- Flux centré

$$F(w_L, w_R) = A \frac{w_L + w_R}{2} \quad (28)$$

- Flux décentré

$$F(w_L, w_R) = A^+ w_L + A^- w_R \quad (29)$$

où  $A^+$  et  $A^-$  sont les matrices de convection upwind et downwind de la matrice  $A$

$$A^\pm = \left( \int_v v^\pm \varphi_i \varphi_j \right), \quad (30)$$

avec

$$v^+ = \max(v, 0), \quad v^- = \min(v, 0).$$



# IV. CAS TEST













# Amortissement Landau

Les conditions initiales sont

- La fonction de distribution

$$f_0(x, v) = (1 + \varepsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

- Le champ électrique

$$E_0(x) = \frac{\varepsilon}{k} \sin(kx)$$

- Le domaine de  $x$  est  $L = \frac{2\pi}{k}$
- $v \in ] - 6, 6[$

# Amortissement Landau

Pour un petit  $\varepsilon$ , on peut considérer une approximation linéaire du système de Vlasov-Poisson non-linéaire. La solution analytique du champ électrique est donnée par la formule suivante (voir "E. Sonnendrucker Approximation numerique des equations de Vlasov-Maxwell, Notes du cours de M2, 18 mars 2010")

$$E(x, t) = 4\varepsilon r e^{\omega_i t} \sin(kx) \cos(\omega_r t - \varphi),$$

où  $\omega_r$  la partie réelle et  $\omega_i$  : la partie imaginaire de  $\omega$ .

La table de valeurs numériques de  $\omega$ ,  $r$  et  $\varphi$  est

$k$	$\omega$	$r e^{I\varphi}$
0.5	$\pm 1.4156 - 0.1533I$	$0.3677 e^{\pm I 0.536245}$
0.4	$\pm 1.2850 - 0.0661I$	$0.424666 e^{\pm I 0.3357725}$
0.3	$\pm 1.1598 - 0.0126I$	$0.63678 e^{\pm I 0.114267}$
0.2	$\pm 1.0640 - 5.510 \times 10^{-5} I$	$1.129664 e^{\pm I 0.00127377}$

# Amortissement Landau

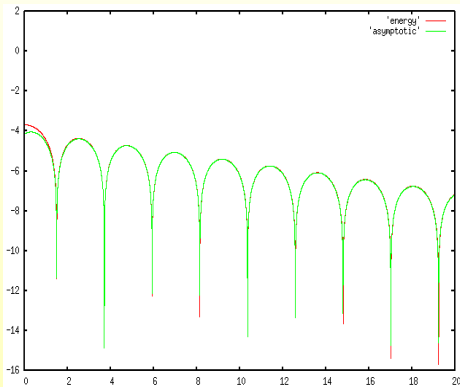
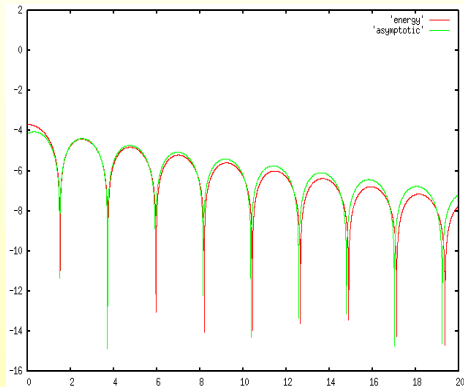
L'énergie électrique est défini par

$$\Xi(t) = \sqrt{\int_0^L E(x, t)^2 dx}.$$

On choisit les paramètres  $k = 0.5$  et  $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ . On va étudier notre méthode (méthode de Vlasov-Poisson réduit) en comparant l'énergie électrique de notre méthode avec la solution analytique.

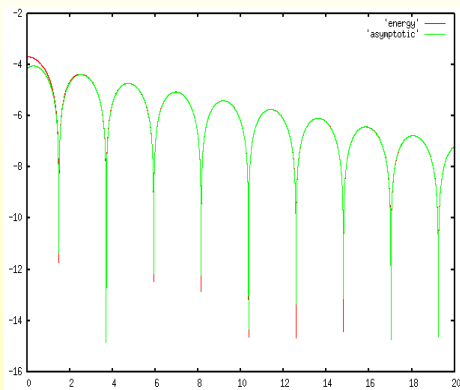
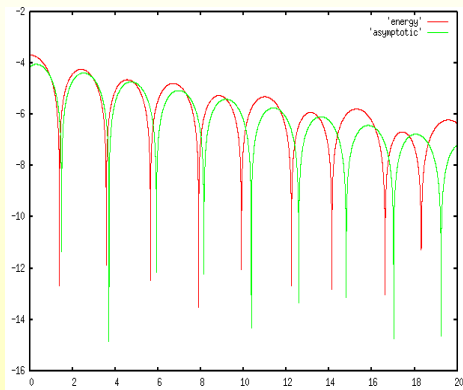
# Amortissement Landau :

## Comparaison de schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 en temp



Énergie électrique au cours du temps : modèle Vlasov-Poisson réduite (en rouge) et la solution analytique (en vert) après un temps  $t = 20$ .

# Amortissement Landau : Système Vlasov-Ampère réduite



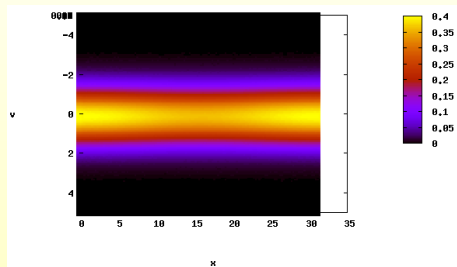
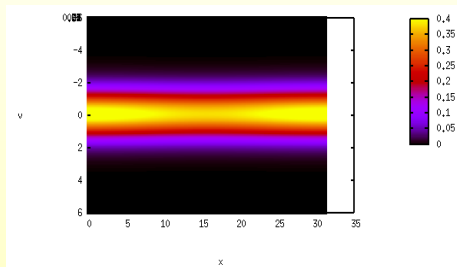
Énergie électrique au cours du temps : Le schéma explicite (à gauche) et le schéma semi-implicite (à droite). Modèle Vlasov-Poisson réduit (en rouge) et la solution analytique (en vert) après un temps  $t = 20$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC

On choisit les paramètres  $k = 0.2$  et  $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ . On va comparer la méthode de Vlasov réduite avec la méthode PIC

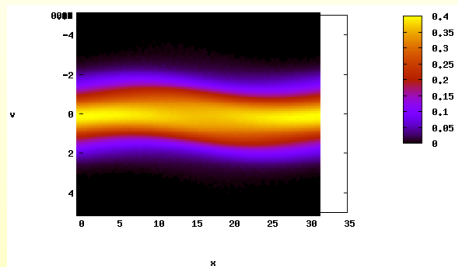
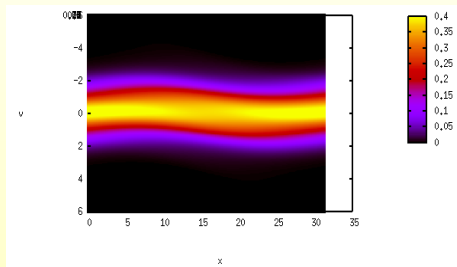
- La fonction de distribution  $f$ .
- L'énergie électrique.

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 0$ .

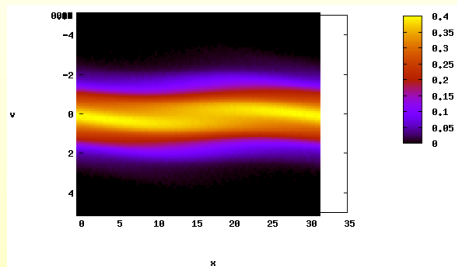
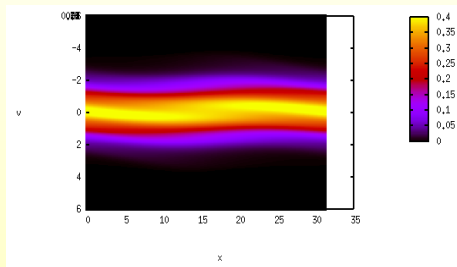
# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 10$ .

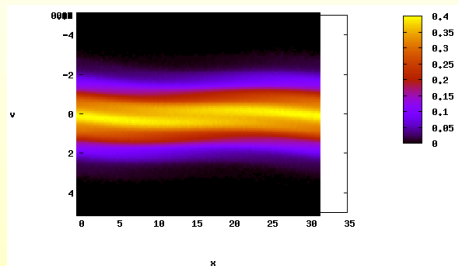
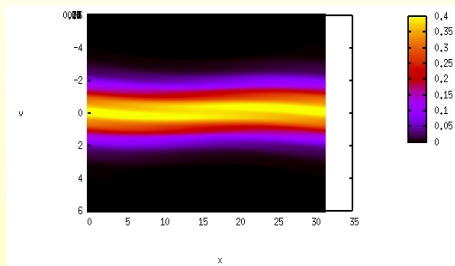


# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



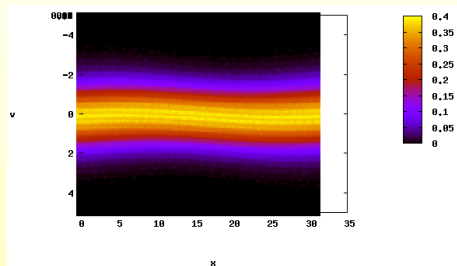
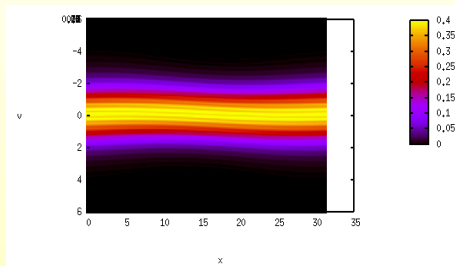
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 20$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



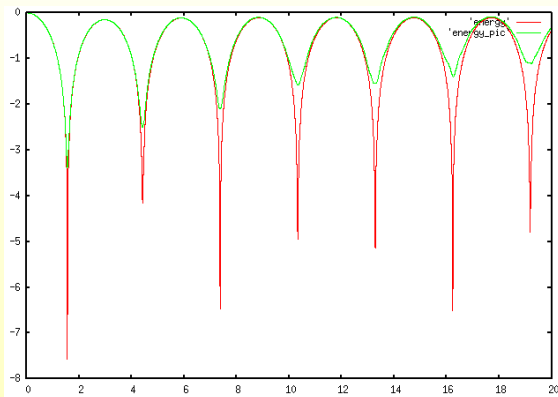
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 30$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 100$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



Amortissement Landau - Énergie électrique au cours du temps : modèle Vlasov-Poisson réduit (en rouge) comparé à la méthode PIC (en vert) après un temps  $t = 20$ .

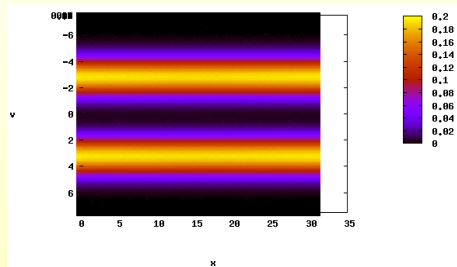
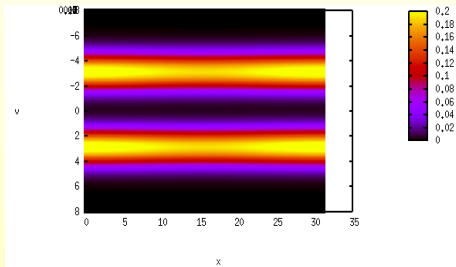
# Instabilité double faisceau

Dans ce cas test, la fonction de distribution initiale est

$$f_0(x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}} \right),$$

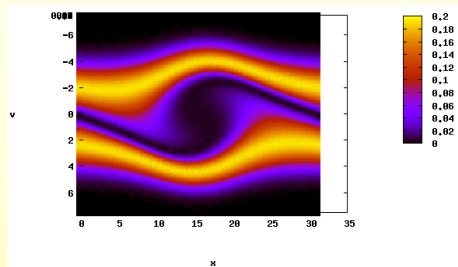
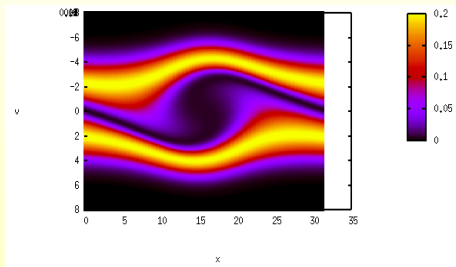
et on choisit les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$  et  $v_0 = 3$  et le domaine d'étude est  $L = \frac{2\pi}{k}$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC



Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 0$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC



Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 20$ .









