



# Approximation hyperbolique de l'équation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM  
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Seignosse, le 27 mai 2013

# Approximation hyperbolique de l'équation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM  
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Seignosse, le 27 mai 2013

# Outline

- 1 Modèle mathématique
- 2 Résoudre le système de Vlasov-Poisson 1D
- 3 Étude de l'équation de Vlasov-Poisson avec la transformée de Fourier en vitesse
- 4 Cas test

# I. MODÈLE MATHÉMATIQUE

# Modèle simplifié de Vlasov-Poisson 1D

On considère l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \quad (1)$$

- $f(x, v, t)$  : la fonction de distribution
- $E(x, t)$  : le champ électrique est donné par l'équation de Poisson

$$\partial_x E = -1 + \int_v f dv \quad (2)$$

On suppose que  $x \in ]0, L[$  et  $v \in ]-V, V[$ , on peut considérer

- Les conditions aux limites périodiques

$$E(0, t) = E(L, t), \quad f(0, v, t) = f(L, v, t). \quad (3)$$

- Les conditions aux bords

$$E(x, t) > 0 \Rightarrow f(x, -V, t) = 0; \quad E(x, t) < 0 \Rightarrow f(x, V, t) = 0. \quad (4)$$

- La condition de moyenne nulle :  $\int_x E = 0$ .

# Modèle simplifié de Vlasov-Poisson 1D

Le modèle de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \\ \partial_x E = -1 + \int_v f dv \end{cases} \quad (5)$$

Avec les condition initiales

$$E(x, 0) = E_0(x), \quad f(x, v, 0) = f_0(x, v). \quad (6)$$

# Modèle de Vlasov-Poisson avec la transformée de Fourier en vitesse

On considère la transformée de Fourier en vitesse

$$\phi(x, \eta, t) = \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) \exp(-l\eta v) dv, \quad (7)$$

où  $l = \sqrt{-1}$ .

L'équation de Vlasov devient

$$\partial_t \phi + l \partial_x \partial_\eta \phi + l E \eta \phi = 0. \quad (8)$$

L'équation de Poisson devient

$$\partial_x E(x, t) = -1 + \phi(x, 0, t) \quad (9)$$

On considère un domaine assez grand en  $\eta$ ,  $]-\eta_{max}, \eta_{max}[$  et on écrit

$$\phi(-\eta_{max}) = \phi(\eta_{max}) = 0.$$

## II. RÉSOUDRE LE SYSTÈME DE VLASOV-POISSON 1D



# Résoudre le système de Vlasov-Poisson 1D

On a fait dans 2 étapes suivantes

- Première étape : Discrétisation en vitesse de l'équation de Vlasov
- Deuxième étape : Résoudre le système hyperbolique avec la méthode de volumes finis

On a testé le programme avec les trois cas tests suivants :

- L'équation de transport
- Amortissement Landau
- Instabilité double faisceau

(Voir : Helluy P., Pham N., Crestetto A. Space-only hyperbolic approximation of the Vlasov equation. 2012

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797974>)

# III. ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON AVEC LA TRANSFORMÉE DE FOURIER EN VITESSE

# Discrétisation en variable $\eta$ de l'équation de Vlasov-Fourier

On considère l'équation de Vlasov-Fourier

$$\partial_t \phi + I \partial_x \partial_\eta \phi + IE \eta \phi = 0. \quad (10)$$

La fonction  $\phi(x, \eta, t)$  est approchée par

$$\phi(x, v, t) = \sum_{j=1}^P w_j(x, t) \varphi_j(\eta) \quad (11)$$

L'équation de Vlasov-Fourier devient

$$M \partial_t w + IA \partial_x w + IEB w = 0. \quad (12)$$

Les matrices  $M, A, B$  sont définies par

$$M_{ij} = \int_v \varphi_i \varphi_j, \quad B_{ij} = \int_v v \varphi_i \varphi_j, \quad (13)$$

$$A_{ij} = \int_\eta (\varphi_i \varphi_j') - \frac{1}{2} \varphi_i(\eta_{max}) \varphi_j(\eta_{max}) + \frac{1}{2} \varphi_i(-\eta_{max}) \varphi_j(-\eta_{max}). \quad (14)$$

# Discrétisation en variable $\eta$ de l'équation de Vlasov-Fourier

## Propriétés du nouveau système

- Le système est écrit dans l'espace de  $x$  et pas dans l'espace de  $(x, \eta)$   
 $\Rightarrow$  On peut simplifier les calculs  
 Appelons le nouveau système : équation de Vlasov-Fourier réduite.
- On a démontré que ce système est hyperbolique  
 $\Rightarrow$  On peut utiliser les méthodes numériques pour les systèmes hyperboliques pour résoudre ce système

On observe que :

- Les matrices  $M$ ,  $A$  et  $B$  sont des matrices creuses si  $\{\varphi_j\}_j$  est une base d'éléments finis.
- Les matrices  $M$ ,  $A$  et  $B$  ont la même structure.  
 $\Rightarrow$  On doit seulement calculer la structure pour une matrice.

# Résoudre de l'équation de Vlasov-Fourier réduite

On considère l'équation de Vlasov réduite

$$\begin{aligned}
 M\partial_t w + IA\partial_x w + IEBw &= 0 \\
 M\partial_t w &= I(-A\partial_x w - EBw) \\
 M\partial_t w &= I(-A\partial_x w + S),
 \end{aligned} \tag{15}$$

où  $S(w) = -EBw$  le terme source.

Le schéma semi-discret en espace s'écrit

$$M\partial_t w_i = I\left(-\frac{F(w_i, w_{i+1}) - F(w_{i-1}, w_i)}{\Delta x} + S(w_i)\right), \tag{16}$$

où

$$w_i(t) \simeq w(x, t), \quad x \in C_i$$

est l'approximation constante par morceaux de  $w$  dans la cellule  $C_i$ .

# Résoudre de l'équation de Vlasov-Fourier réduite

On considère le schéma ordre 2 en temps

$$M \frac{w_i^{n+1/2} - w_i^n}{\Delta t/2} = I \left( - \frac{F(w_i^n, w_{i+1}^n) - F(w_{i-1}^n, w_i^n)}{\Delta x} + S(w_i^n) \right), \quad (17)$$

$$M \frac{w_i^{n+1} - w_i^{n+1/2}}{\Delta t} = I \left( - \frac{F(w_i^{n+1/2}, w_{i+1}^{n+1/2}) - F(w_{i-1}^{n+1/2}, w_i^{n+1/2})}{\Delta x} + S(w_i^{n+1/2}) \right), \quad (18)$$

où  $F(w_L, w_R)$  est le flux centré

$$F(w_L, w_R) = A \frac{w_L + w_R}{2} \quad (19)$$

# La fonction de distribution

La transformée de Fourier inverse de la fonction  $\phi$  s'écrit

$$f(x, v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, \eta, t) e^{i\eta v} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta_{\max}}^{\eta_{\max}} \phi(x, \eta, t) e^{i\eta v} d\eta. \quad (20)$$

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale définie

$$\int_{-\eta_{\max}}^{\eta_{\max}} \phi(\eta) e^{i\eta v} d\eta \simeq \Delta\eta \sum_{j=0}^{P-2} \phi(\eta_j) e^{i\eta_j v}. \quad (21)$$

On peut

- Calculer directement par la somme ; ou bien
- Utiliser l'algorithme de la transformée de Fourier rapide

## IV. CAS TEST



# Amortissement Landau

Les conditions initiales sont

- La fonction de distribution

$$f_0(x, v) = (1 + \varepsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

donc on a

$$\phi_0(x, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) e^{-I\eta v} dv = (1 + \varepsilon \cos(kx)) e^{-\frac{\eta^2}{2}}.$$

- Le champ électrique

$$E_0(x) = \frac{\varepsilon}{k} \sin(kx)$$

- Le domaine de  $x$  est  $L = \frac{2\pi}{k}$

- $\eta \in ] -20, 20[$

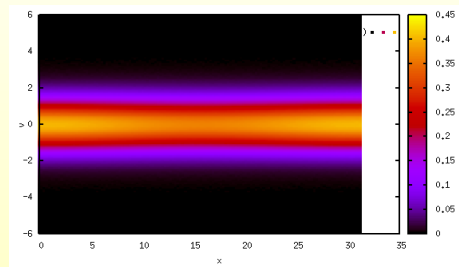
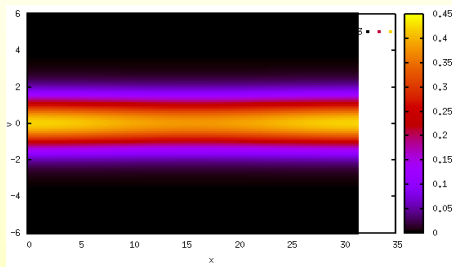
# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC

On choisit les paramètres  $k = 0.2$  et  $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ . On va comparer la méthode de Vlasov-Fourier réduite avec la méthode PIC

- La fonction de distribution  $f$ .
- L'énergie électrique qui est définie par

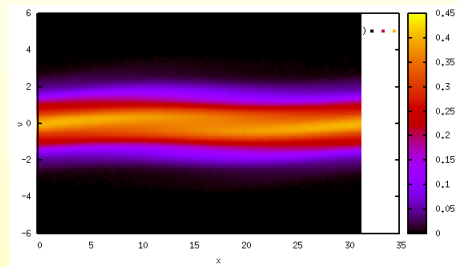
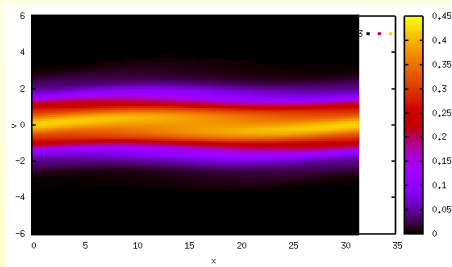
$$\Xi(t) = \sqrt{\int_0^L E(x, t)^2 dx}.$$

## Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



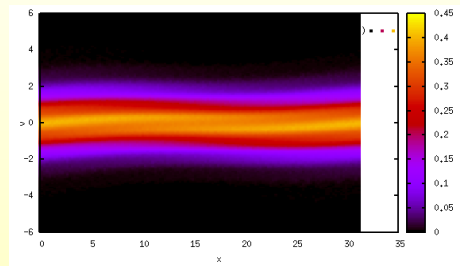
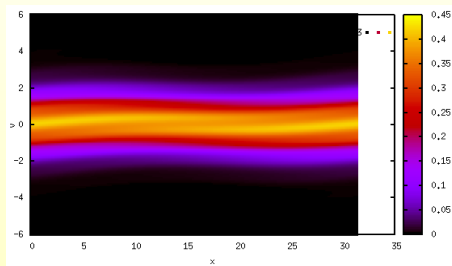
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 0$ .

## Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



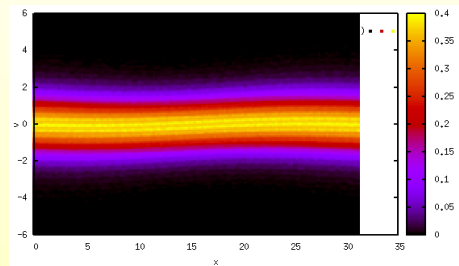
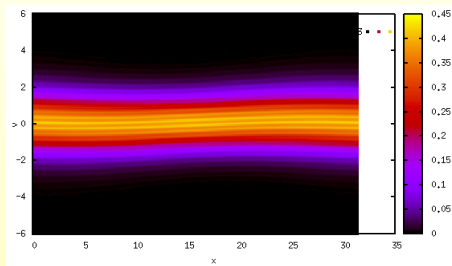
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 20$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



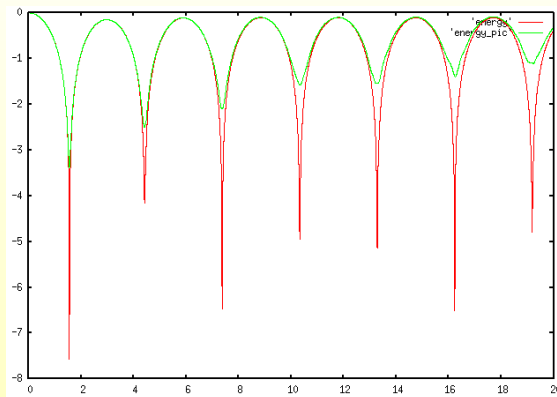
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 30$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



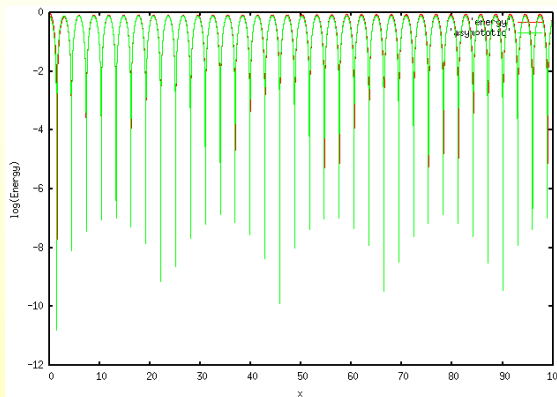
Amortissement Landau - Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 100$ .

# Amortissement Landau : Comparer avec la méthode PIC



Amortissement Landau - Énergie électrique au cours du temps : modèle Vlasov-Fourier réduit (en rouge) comparé à la méthode PIC (en vert) après un temps  $t = 20$ .

# Amortissement Landau :



Amortissement Landau - Énergie électrique au cours du temps : modèle Vlasov-Fourier réduit (en rouge) comparé à la solution analytique (en vert) après un temps  $t = 100$ .



# Instabilité double faisceau

Dans ce cas test, la fonction de distribution initiale est

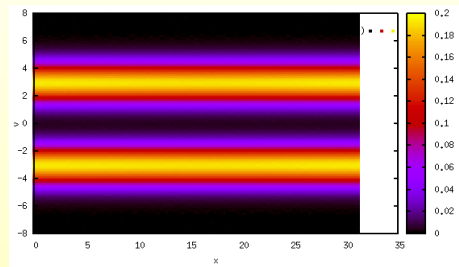
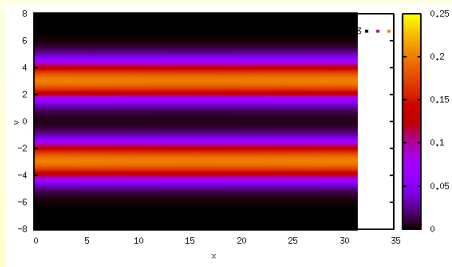
$$f_0(x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}} \right),$$

donc

$$\phi_0(x, \eta) = (1 + \epsilon \cos(kx)) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \cos(\eta v_0)$$

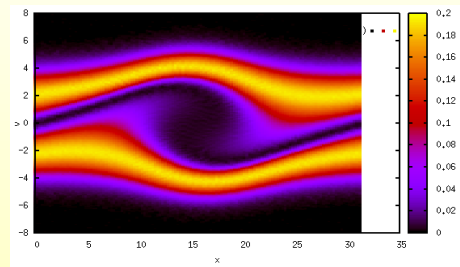
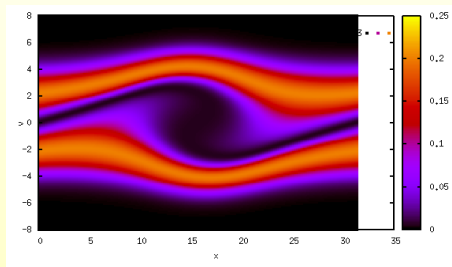
On choisit les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$  et  $v_0 = 3$  et le domaine d'étude est  $L = \frac{2\pi}{k}$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC



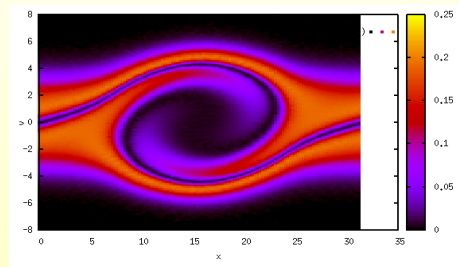
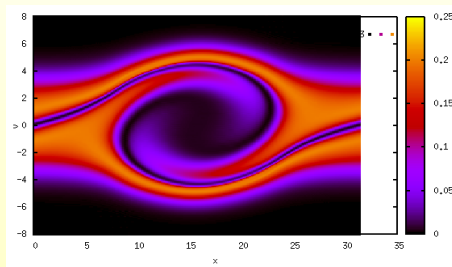
Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 0$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC



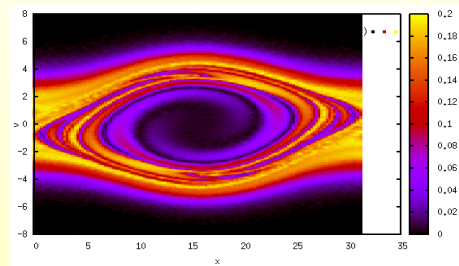
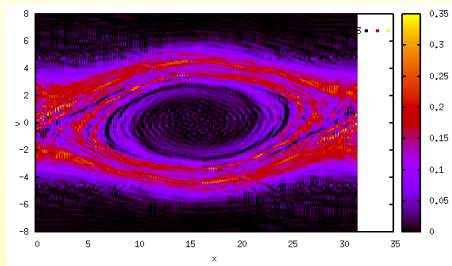
Fonction de distribution : modèle Vlasov-Poisson réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 20$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC



Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 25$ .

# Instabilité double faisceau : Comparer avec la méthode PIC

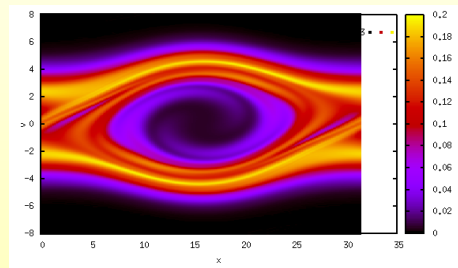
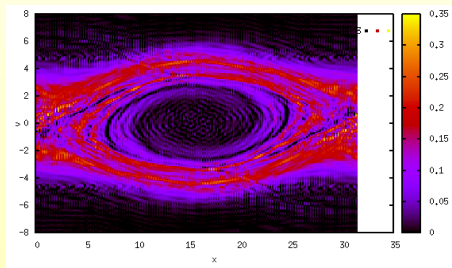


Fonction de distribution : modèle Vlasov-Fourier réduite (à gauche) comparé à la méthode PIC (à droite) au temps  $t = 50$ .

# Instabilité double faisceau : Le flux slightly upwinded

Dans le but d'enlever les oscillations dans le cas test, on va introduire un flux slightly upwinded :

$$F(w_L, w_R) = A \frac{w_L + w_R}{2} + I \frac{\varepsilon}{2} (w_R - w_L), \quad (22)$$



Fonction de distribution au temps  $t = 50$ . À gauche : avec le flux centré.  
À droite : avec le flux slightly upwinded ( $\varepsilon = 0.05$ ).

# Perspectives

- Passer le calcul en dimension 2
- Utiliser un schéma Galerkin Discontinu d'ordre élevé.
- Étude d'un modèle non-linéaire
- Étude de l'équation Vlasov-Poisson avec la transformée de Fourier en vitesse et condition PML.

MERCI POUR VOTRE  
ATTENTION !





A. Crestetto, Optimisation de méthodes numériques pour la physique des plasmas. Application aux faisceaux de particules chargées, her thesis, October 2012.



Eliasson, B. Outflow boundary conditions for the Fourier transformed one-dimensional Vlasov-Poisson system. J.Sci.Comput. 16 (2001).



F. Filbet, E. Sonnendrucker. Comparison of Eulerian Vlasov solvers Comput. Phys. Commun., 150 (2003).