Université de Strasbourg
Techniques d'analyse numérique L3S6
Année 2016-2017

TP 2 : Interpolation de Lagrange

1 Interpolation de Lagrange

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et n points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. D'après le cours, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, noté $L_{n-1}(x) \in P_{n-1}$, tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ L_{n-1}(x_i) = f(x_i).$$

Ce polynôme peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_{n-1}(x) = f[x_1] \quad & + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) + ... \\ & + f[x_1, x_2, ..., x_n](x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés par les relations de récurrences suivantes:

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_2, ..., x_k] - f[x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_1}.$$

La quantité $f[x_1, ..., x_k]$ est appelé différence divisée d'ordre k de f aux points $x_1, ..., x_k$. On peut représenter le calcul de ces coefficients par le tableaux suivant :

$$\begin{array}{cccccc} x_n & f[x_n] & & & & \\ x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ x_3 & f[x_3] & \cdots & \cdots & \ddots & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & \cdots & f[x_2, ..., x_n] & \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & \cdots & f[x_1, ..., x_{n-1}] & f[x_1, ..., x_n] \end{array}$$

Pour calculer les coefficients de L_{n-1}, c'est-à-dire la dernière ligne du tableau, il suffit de connaître l'avant dernière ligne qui correspond aux coefficients du polynôme d'interpolation aux points $x_2, ..., x_n$.

1. A l'aide des différences divisées, montrez que le polynôme d'interpolation de $x \mapsto sin(\pi x/2)$ en $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ est le polynôme $L_2(x) = 2x - x^2$.

2. Ecrire une fonction qui prend en entrée une fonction f et un vecteur xt de points d'interpolation et qui donne en sortie le vecteur des différences divisée c. On pourra au choix :

   - élaborer un algorithme direct en construisant la matrice des différences divisées.

- élaborer un algorithme récursif en complètant la fonction suivante (avec f la fonction à interpoler et xt les vecteurs des points d'interpolation, c : vecteurs des coefficients des differences divisées) :

```
function [c] = DiffDiv(xt,f)
  n = length(xt)
  if (n == 1) then
     c = ...
  else
     c_ant = DiffDiv(xt(2:n),f)
  end
endfunction
```

3. Pour calculer la valeur du polynôme d'interpolation de Lagrange en un point, on utilise ensuite une variante de l'algorithme de Horner. Il est basé sur l'écriture suivante :

$$p(x) = c_1 + (x - x_1)\,[c_2 + (x - x_2)\,[c_3 + (x - x_3)[c_4 + \cdots]]]$$

où $c = (c_1, c_2, \ldots)$ est le vecteur des coefficients des différences divisées (voir la question précédente), xt est le vecteur des points d'interpolation, x est le vecteur des points où l'on veut évaluer le polynôme d'interpolation et y est le vecteur des valeurs prises par le polynôme d'interpolation aux points x. On complètera la fonction suivante :

```
function y = Horner(c,xt,x)
  n = length(xt)
  y = c(n)*ones(x)
  for i = 1:(n-1)
      ...
  end
endfunction
```

4. Considérons les fonctions suivantes :

$$f: \; x \mapsto 8x^2 - 6x + 1/2, \quad g: \; x \mapsto \sin(8\pi x),$$

Utiliser ces fonctions pour représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange de f et de g pour $n = 2$ et pour $n = 3$. Ajouter sur le même graphique le graphe de f et de g ainsi que les points d'interpolation.

2 Convergence des polynômes d'interpolation : $\|L_n - f\|_\infty \to 0$?

2.1 Phénomène de Runge :

On considère la fonction suivante :

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 0.1} \tag{1}$$

- Représenter les polynômes d'interpolation de Lagrange de degrés $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pour des points d'interpolation répartis uniformément sur $[-1, 1]$.

- Représenter les polynômes d'interpolation de Lagrange de degrés 19 et 20 pour des points d'interpolation répartis uniformément sur $[-1, 1]$.
- Commentez.

2.2 Interpolation aux points de Tchebychev.

On considère les points d'interpolation :

$$x_i = \cos(\pi \frac{2k+1}{2n}) \in [-1, 1], \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1, \tag{2}$$

racines du polynômes de Tchebychev : $T_n(x) = \cos(n \ \arccos(x))$.

- Représenter les polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction h avec les points d'interpolation de Tchebychev.
- Commentez.

3 Interpolation de Lagrange par morceaux

Ecrire un programme qui subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles et qui interpole une fonction f sur chacun de ces sous-intervalles par un polynôme de degré 2 (cette fonction prendra donc en entrée deux réels a, b, un entier n, une fonction f et un vecteur x sur lequel sera évaluer l'interpolation).