Université de Strasbourg
Techniques d'analyse numérique L3S6
Année 2016 - 2017

TP 4 : Polynômes Orthogonaux

Intégration numérique - Méthodes de Gauss.

Cette méthode permet de trouver $n+1$ points de quadrature (x_i) et $n+1$ coefficients (λ_i) telle que la formule approchée :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

soit d'ordre $2n+1$ (exacte pour $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$), où $\omega : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est un poids.

1. Méthode de Gauss-Legendre: $(\omega(x) = 1)$.

1. Pour $n = 1$, on a : $x_0 = -1/\sqrt{3}$ et $x_1 = 1/\sqrt{3}$ et $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$.
2. Pour $n = 2$, on a : $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ avec $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{8}{9}$.

Programmez la méthode de Legendre composée avec $n = 1$ et $n = 2$ (pour calculer $\int_a^b f(x)dx$). Comparer avec la méthode des trapèzes.

2. Méthode de Gauss-Tchebychev $(\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points de quadrature sont les racines des polynômes de Tchebytchev : $T_n(x) = cos(narccos(x))$. Les points et les coefficients de quadrature sont donnés par :

$$x_i = cos(\pi\frac{2i+1}{2n+2}) \in [-1,1], \quad \lambda_i = \frac{\pi}{n+1}. \tag{1}$$

- Ecrire une fonction `Tchebychev` prenant en entrée une fonction f et un entier n et qui retourne la valeur approchée de l'intégrale de $f(x)/(\sqrt{1-x^2})$ sur $[-1,1]$.
- Tracer l'erreur entre la formule de de Gauss-Tchebytchev et la valeur "exacte" de l'intégrale en fonction de n (en échelle logarithmique) pour les fonctions $g : x \mapsto \exp(3x)$ et $g_5 : x \mapsto |x|^5$ avec $n = 2, \cdots, 10$. Sur le même graphique représenter les courbes $n \mapsto 1/n$, $n \mapsto 1/n^2$, $n \mapsto 1/n^3$. Commentez.
  Remarque : Pour obtenir la valeur "exacte" de l'intégrale, on pourra calculer l'intégrale avec n très grand (par exemple $n = 100$).