Un peu d'analyse

1 Expressions, Fonctions.

Une **expression** en maple est l'assignement à une variable d'une valeur dépendant d'une ou plusieurs autres variables. Par exemple,

```
> expr:=x**3+45*x+1;
```

On peut évidemment effectuer toutes les opérations usuelles (addition, multiplication, ...) entre les expressions. Il peut être utile d'évaluer une expression en une valeur, c'est à dire de remplacer la variable par une valeur, pour cela on utilise la commande `eval` ou bien `subs`, :

```
> eval(expr, x=2);
> subs(x=2, expr);
```

La syntaxe pour une **fonction** est la suivante:

```
> fonct :=y->sin(y);
```

Dans la syntaxe précédente la variable `y` est muette, c'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quel autre nom de variable.
Pour évaluer la fonction, on fait

```
> fonct(Pi);
```

On peut transformer une fonction en expression en appliquant un nom de variable qui n'est pas encore affecté à la fonction:

```
> exprfonct:=fonct(z);
```

l'expression `exprfonct` dépend alors de la variable `z`.
On peut également transformer une expression en fonction en utilisant la commande `unapply`:

```
> g:=unapply(exprfonct,z);
```

DANS LA SUITE, IL SERA ESSENTIEL DE FAIRE LA DIFFÉRENCE ENTRE UNE EXPRESSION ET UNE FONCTION. Bien qu'il puisse être plus commode de travailler avec une expression, les fonctions peuvent également être utiles, notamment si on veut éviter d'avoir à contreôler la variable paramètre.
On peut également remarquer que toutes les procédures qui sont crées sont des fonctions. Beaucoup de fonctions usuelles sont déjà implémentdes dans Maple: (`sin`, `ln`,...).

2 Limites, Sommes.

En Maple il existent des commandes pour calculer les limites des suites et les sommes infinies. Par exemple `limit(sin(1/n), n=infinity)` calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 1. *Calculer les limites des suites suivantes:*

$$\frac{n!}{n^n},\ \frac{n^6}{e^n},\ \frac{4n^3+16n}{5n^2+7},\ \frac{4n^3+2n^2+3}{5n^3+17},\ n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right),\ n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2. *Calculer les limites des suites suivantes:*

$$\sin n,\ \cos(n\pi),\ \cos^2 n,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right).$$

Que donne Maple comme résultat?

Pour calculer la somme d'une série numerique entre deux bornes numériques finies, on utilise `add`. Par exemple

```
> add(1/n, n=1..6);
```

calcule

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

Exercice 3. *Calculer les sommes suivantes:*

$$\sum_{k=0}^{5} xk, \quad \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k},$$

Lorsque les bornes sont des variables ou infinies, il faut utiliser la commande `sum`:
`> sum(1/n,n=1..∞);`

Exercice 4. *Calculer les sommes suivantes:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

On peut calculer la limite d'une expression en un point `p`,
la syntaxe utilisée est `> limit(expr, x=p);`

Exercice 5. *Calculer les limites des expressions suivantes:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to \pi/2} \tan(x), \quad \lim_{x\to 3} x^6, \quad \lim_{x\to\infty} \sin(x).$$

3 Dérivation et integration

Maple peut calculer la dérivée d'une expression, on utilise pour cela la commande `diff`. `> restart;`

```
> expr:=x+sin(x);
> diff(expr,x);
```

ATTENTION, pour calucler la dérivée d'une fonction, vous devrez d'abord la transformer en expression:

```
> f:=y->tan(y);
> diff(f(x),x);
```

Pour calculer la derivée k-ème on utilise `diff(expr, x$k);`
Pour le **calcul d'une primitive** on écrit
`> int(expr, x);`
pour le **calcul de l'integrale** il faut spécifier les bornes:
`> int(expr, x=a..b);`
les valeurs $\pm\infty$ sont admises pour les bornes. N'oubliez pas qu'il faut toujours calculer avec une expression, c'est à dire choisir une variable.

Exercice 6. *Calculer les dérivées des expressions suivantes*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad \arcsin(x) + \arccos(x).$$

Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx, \quad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx, \quad \int_{0}^{10\pi} x + \sin(x)dx.$$

Exercice 7. *Écrire une procédure prenant en argument un entier n et renvoyant le développement limité de* $\sin(x)$ *en* 0 *jusqu'à l'ordre n.*

4 Dessiner un graphe

La syntaxe pour tracer une expression est
`> plot(expr, x=a..b);`
où `a` et `b` sont les extremités de l'intervalle sur lequel on veut tracer le graphe. Tracez le graphe de $\sin(x)$ de -2π à 2π. Maple est aussi capable de tracer plusieurs graphes superposés:
`> plot([expr1, expr2], x=a..b);`
On peut également tracer une fonction:
`> plot(sin, -Pi..Pi);`

Exercice 8. *Dessiner le graphe de* $\sin(x)$ *de* $-\infty$ *à* ∞*. Faire la même chose avec* x^2*. Que constate-t-on? Expliquer la forme apparente.*

Exercice 9. *Calculer le polynôme de Taylor de* $\sin(x)$ *en* 0 *jusqu'à l'ordre 10. Ensuite tracer les graphes superposés de* $\sin(x)$ *et du polynôme sur l'intervalle* $[-3\pi, 3\pi]$.

5 Résolution d'équations

Une équation en maple est une expression contenant le symbole `=`. Par exemple
`> eq:= x**4+7*x**2+1=-3;` On peut la **résoudre formellement** en utilisant la commande `solve`:
`> solve(eq, x);`
Il est aussi possible de resoudre des systèmes d'équations. On considère le système

$$\begin{cases} 4x + 5y + 7z - 1 &= 0 \\ 2x - 8y - z + 3 &= 0 \\ 3x + 3y + z + 7 &= 0. \end{cases}$$

Ecrivez les commandes suivantes sur votre feuille de travail:

```
> eq1:= 4*x+5*y+7*z-1=0;
> eq2:= 2*x-8*y-z+3=0;
> eq3:= 3*x+3*y+z+7=0;
> solve({eq1,eq2,eq3}, {x,y,z});
```

Pour **résoudre numériquement** une équation on utilise la commande `fsolve`, la syntaxe correcte est
`fsolve(eq, x=a..b);`
où `a` et `b` sont les extremités de l'intervalle.

Exercice 10. *Résoudre formellement l'équation* $x^4 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

Exercice 11. *Considerons l'équation* $\cos x = e^x$.

1. *Tracer sur un même graphique les courbes des deux fonction considerées, pour* $x \in [-10, 1]$.
2. *Résoudre formellement l'équation.*
3. *Calculer une valeur approchée de chacune des solutions qui apparaissent dans l'intervalle considéré.*

6 Méthode de Newton.

Pour approcher une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ où f est une fonction rélle, on peut utiliser la méthode de Newton.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et x_0 un point de I. On effectue le développement limité de la fonction f à l'ordre 1 au voisinage de x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2).$$

On peut alors remplacer approximativement la solution de $f(x) = 0$ par celle de

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, on note x_1 la solution de cette équation approchante. On construit ainsi une suite (x_n) en posant

$$f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}).$$

Pour cela, il faut supposer que la dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle considéré.

Exercice 12. *Ecrire une procédure qui prend en entreés une fonction* f*, un entier* x_0 *et qui renvoie la suite* (x_n) *associée. Testez votre procédure avec différentes fonctions.*