Polynômes

1 Remarques générales

Un **polynôme** se définit comme une expression.
`>p:=x**3-x+2;`
Pour **évaluer un polynôme en un point** on utilise de préférence `eval`.
`>eval(p,x=2);`
La commande `expand` permet de **réduire et ordonner le polynôme** suivant les puissances de x.
`>q:=(3*x+4)**3; expand(q);`
Les commandes `degree` et `lcoeff` permettent de donner **le degré et le coefficient dominant d'un polynôme**.
`>degree(q,x); lcoeff(q,x);`

Exercice 1 *Vérifier que les expressions suivantes définissent des polynômes :*

$$\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}, \quad \sin(5\arcsin(x)), \quad \sinh(5\,\mathrm{arcsinh}(x)).$$

La commande `solve` permet de donner les **racines d'un polynômes** :
`>solve(x**4+2*x**3+2*x**2+2*x+1,x);`
On remarque que lorsque l'on donne une expression (au lieu d'une égalité) comme argument pour la commande `solve`, Maple résout par défaut `<expression>=0`.
Maple cherche toutes les solutions réelles et complexes avec leurs multiplicités, donc pour un polynôme de degré n, il renverra en général n racines.

Exercice 2 *Donner les racines des polynômes suivants :*

$$x^3-1, \quad x^5-1, \quad x^3-2x+1.$$

Il arrivera assez souvent que Maple retourne des choses absolument illisibles comme solutions.
`>solve(x**3-30*x+1);`
Dans ce cas, il est parfois utile de faire une étude approchée en traçant le polynôme et en cherchant les racines numériquement à l'aide de la commande `fsolve` :
`>plot(x**3-30*x+1);`
`>fsolve(x**3-30*x+1);`
On constate d'ailleurs que le polynôme possède 3 racines réelles alors que la résolution exacte donne l'impression qu'il possède des racines complexes.

Exercice 3 *On considère le polynôme*

$$P(x) = x^3-3x-1.$$

1. *Chercher les racines de P. Calculer une évaluation de ses racines à l'aide de la commande* `evalf`.
2. *Tracer $P(x)$ sur l'intervalle $[-3;3]$.*
3. *Chercher des valeurs approchées des racines.*
4. *Que constate-t-on par rapport à l'approximation des solutions exactes ?*
5. *Vérifier que les nombres*

$$2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right),$$

sont les racines du polynôme.

2 L'espace $\mathbb{R}_n[x]$

On note $E_n = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que E_n est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n+1$ et que les polynômes

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

forment une base de E_n.

3 Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes T_n en posant

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1; 1].$$

puis on prolonge la fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
1. Montrer que l'on définit bien un polynôme sur $[-1; 1]$ par la formule précédente. Ces polynômes sont appelés **polynômes de Tchebychev**.*
2. Ecrire une procédure qui prend comme argument un entier n et qui renvoie le polynôme de Tchebychev d'indice n.
3. A l'aide de votre procédure, calculer les 10 premiers polynômes de Tchebychev.
4. Tracer et superposer les graphes des 5 premiers polynômes de Tchebychev.
5. Quels sont les racines du polynômes T_n dans l'intervalle $[-1; 1]$? En déduire toutes les racines de T_n.
6. On définit une suite de polynômes U_n par la formule de récurrence suivante :

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = x, \quad U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x) \quad \textit{pour} \quad n \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ecrire une procédure qui prend en argument un entier n et qui renvoie le polynôme U_n.
7. A l'aide de la procédure, calculer U_n pour $n < 10$. Que constate-t-on ?
8. Montrer que T_n vérifie la relation de récurrence (1). En déduire que $T_n = U_n$.
9. Quels sont les coefficients dominants et les degrés des polynômes T_n ? En déduire une factorisation du polynôme T_n.
10. Montrer que $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, puisqu'une fonction polynomiale est continue, $E_n \subset E$ pour tout n.
On définit l'application $< .,. >: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}\, t.$$

Exercice 5 ***
1. Montrer que cette application est bilinéaire et symétrique.
2. Montrer également que l'application est non dégénérée : pour tout $h \in E$:

$$< h, h >= 0 \Rightarrow h \equiv 0.$$

On dit que l'application $< .,. >$ est un **produit scalaire** sur E.

Exercice 6
1. Ecrire une procédure qui prend en argument deux fonctions et qui renvoie le produit scalaire associé de ces deux fonctions.
2. Calculer $< T_i, T_j >$ pour $i, j \leq 4$. Que constate-t-on ?
On dit que les T_n sont orthogonaux pour le produit scalaire $< .,. >$.

Soit f un élément quelconque de E, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{< T_k, T_k >} T_k(x).$$

On peut montrer que $< f - t_n(f), f - t_n(f) >$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7
1. Expliquer pourquoi $t_n(f)$ est un élément de E_n.
2. Ecrire une procédure qui prend en argument une fonction f un entier n et qui renvoie le polynôme $t_n(f)$.
3. Ecrire une procédure qui prend en argument un nombre réel ϵ et qui renvoie le premier entier n tel que $< f - t_n(f), f - t_n(f) >$ soit inférieur à ϵ, (le polynôme $t_n(f)$ est une approximation quadratique de f sur l'intervalle $[-1; 1]$).
4. Pour $\epsilon = \frac{1}{100000}$, testez votre procédure avec les fonctions suivantes (donnez les valeurs de n associées) :

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x), \quad \ln(x+2), \quad e^x.$$

5. Superposer les courbes et leurs approximations.

L'approximation est parfois très lente, notamment quand la fonction oscille beaucoup.

Exercice 8 *On pose $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x+1.1}\right)$.*
Tracer la fonction et son approximation polynomiale pour quelques valeurs de n.

4 Analogie $\mathbb{R}^{n+1}$ - $\mathbb{R}_n(x)$.

Espace vectoriel	$\mathbb{R}^{n+1}$	$\mathbb{R}_n(x)$
Eléments	Vecteurs : $x = (x_0, \dots x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n)$.	Polynômes : P, Q de degrés inférieurs ou égal à n.
Exemple de base	$\{e_0, \dots, e_n\}$ avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$	$1, x, x^2, \dots, x^n$.
Exemple de produit scalaire	$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$	$< P, Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}\, x$
Vecteurs orthogonaux	$a \cdot b = 0$	$< f, g >= 0$
Exemples de base orthogonale pour le produit scalaire	$\{e_0, \dots, e_n\}$ avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$	les polynômes de Tchebychev