Projet Deloitte : Propriétés asymptotiques des processus à volatilité stochastique

Proposé par Alan PICONE, Deloitte

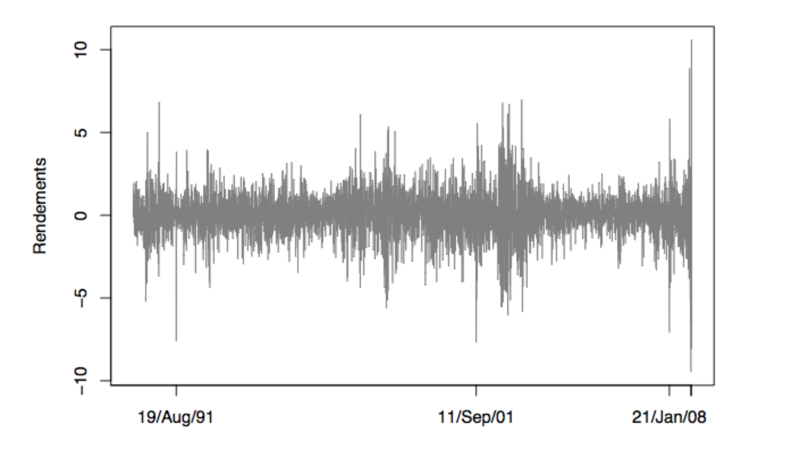
avec Paul CAZEAUX, Paul CHARTON, Nhung PHAM, Laura VINCKENBOSCH et Raghid ZEINEDDINE

Semaine d'étude Maths-Entreprises

Nancy, le 15 février 2013

Plan

Faits stylisés des séries financières - Résultat réel



Rendements de l'indice $CAC40(02/03/1990 - 15/10/2008)$.

Modèle gaussien

On considère un prix sécurisé $S(t)$ et un log-return sur une période donnée, qui est définit par

$$r(t) \equiv \frac{lnS(t+1) - lnS(t)}{\sigma_h},$$

où

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} r(i)^2.$$

Avec le modèle Black-Scholes en temps discret :

$$r_t = \sigma \zeta_t;\ \zeta_t \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On a

- Distribution Gaussienne des rendements r_t
- Rendements r_t indépendants
- La volatilité est constante

Loi de Pareto

Le modèle gaussien ne reflète pas le comportement dans les extrêmes.

Définition

Une variable aléatoire Z suit une loi de Pareto d'exposant μ lorsque sa densité de probabilité s'écrit

$$k(z) \sim \frac{\mu A^{\mu}}{|z|^{1+\mu}} \text{ avec } |z| \geq A.$$

Avec une telle loi de puissance, on observe un phénomène de **"queue lourde" : les extrêmes sont plus fréquents.**

Processus à volatilité stochastique

- **En pratique, la volatilité n'est pas constante.**
  $\rightsquigarrow$ **Lacune du modèle gaussien** (Black-Scholes)
- Modèles de volatilité stochastiques :
  La volatilité dépend de l'historique des rendements
  $\rightsquigarrow$ ceci permet de mieux décrire la réalité.
- La volatilité stochastique est utilisée dans le cadre de la finance quantitative, pour évaluer des produits dérivés, tels que des options.

Plan

Le processus GARCH(1,1)

Considérons le cas d'un modèle GARCH(1,1) :

$$\begin{cases} r_t & = & \sigma_t \zeta_t, \\ \sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}^2 & = & \alpha(\sigma_t^2 - \tilde{\sigma}^2) + g r_t^2 \end{cases}$$

Où

- (ζ_t) est un processus de variables aleatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$,
- (σ_t) est un processus appelé volatilité, $\sigma_t > 0$
- Les variables σ_t et ζ_t sont indépendantes
- g est le paramètre de couplage entre la volatilité et le rendement
- $\tau = -1/\ln(\alpha)$ le temps de relaxation

Les rendements sont distribués instantanément selon la loi gaussienne

$$P(r \leq r_t \leq r + dr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) dr$$

- Comme σ_t et ζ_t sont indépendants et $\zeta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors :

$$\mathbb{E}[r_t] = \mathbb{E}[\sigma_t \zeta_t] = \mathbb{E}[\sigma_t]\mathbb{E}[\zeta_t] = 0$$

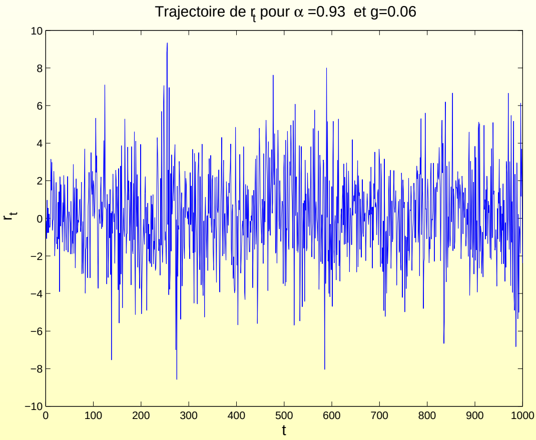
$$Var(r_t) = \mathbb{E}[r_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]\mathbb{E}[\zeta_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$$

  La moyenne de σ_t^2 mesure la dispersion de r_t autour de 0.
- On remarque aussi que le processus de rendement (r_t) est décorrélé : pour $t_2 > t_1$,

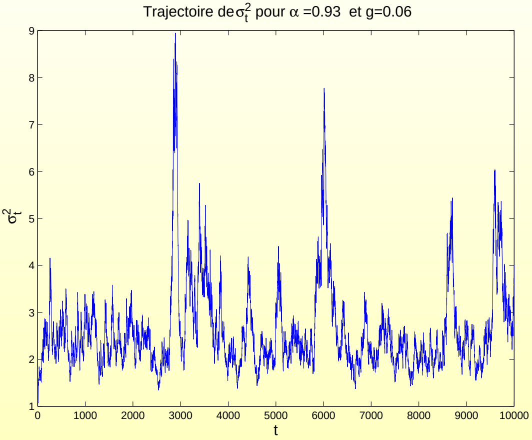
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_{t_1} r_{t_2}] &= \mathbb{E}[\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}\zeta_{t_1}\zeta_{t_2}] \\ &= \mathbb{E}[\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}\zeta_{t_1}]\mathbb{E}[\zeta_{t_2}] = 0!\end{aligned}$$

- Par contre, les rendements ne sont pas indépendants ! En effet, pour $t_1 \neq t_2$ on verra que $\mathbb{E}[r_{t_1}^2 r_{t_2}^2] - \mathbb{E}[r_{t_1}^2]\mathbb{E}[r_{t_2}^2] \neq 0$.

Trajectoire des rendements



Trajectoire de la volatilité



Le cas g=0

Supposons ici que

$$g = 0.$$

Alors :

$$\begin{cases} r_t & = & \sigma_t \zeta_t, \\ \sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}^2 & = & \alpha(\sigma_t^2 - \tilde{\sigma}^2) \end{cases}$$

Donc, on remarque que la volatilité n'est plus aléatoire : par exemple

$$\forall t \geq 0, \quad \sigma_t^2 = \tilde{\sigma}^2 \qquad \text{si } \sigma_0 = \widetilde{\sigma}.$$

- On en déduit que $\boxed{r_t \text{ suit la loi normale de variance } \sigma_0^2.}$

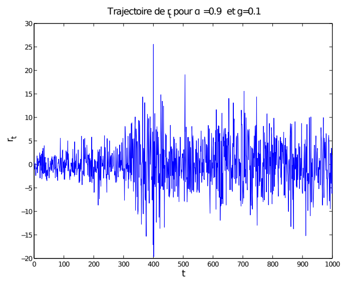
Kurtosis

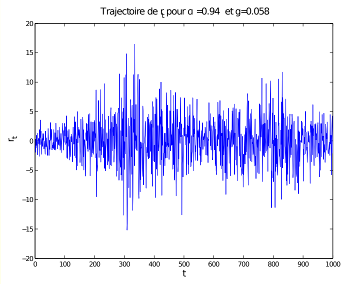
Etant donné une variable aléatoire X de moyenne μ . La kurtosis de X est défini par :

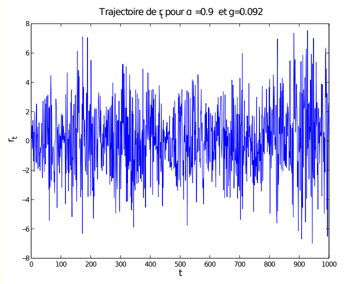
$$\kappa := \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu)^4\right]}{\mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]^2}$$

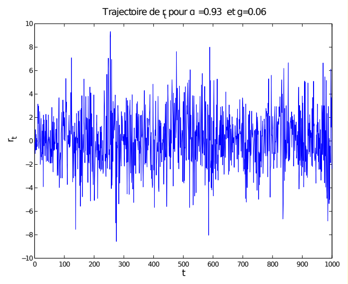
- Dans le cas d'une variable gaussienne ce coefficient est égale à 3. Donc, si une variable aléatoire possède une kurtosis différent de 3 alors elle n'est pas gaussienne.

Plan


Trajectoire de r_t pour α =0.9 et g=0.1
r_t
t


Trajectoire de r_t pour α =0.94 et g=0.058
r_t
t


Trajectoire de r_t pour α =0.9 et g=0.092
r_t
t


Trajectoire de r_t pour α =0.93 et g=0.06
r_t
t

existence et unicité

Théorème

Si $0 \leq \alpha < 1$, *alors :*

1. *il existe une distribution stationnaire pour le processus GARCH(1,1) si et seulement si* $\gamma = \mathbb{E}\left[\ln(\alpha + g\zeta_1^2)\right] < 0$.
2. *si il existe une distribution stationnaire pour le processus GARCH(1,1), alors elle est unique.*

Plan

Existence de moment d'ordre p

Théorème

La loi stationnaire du processus GARCH(1,1) a un moment d'ordre $p > 0$ si et seulement si :

$$\mathbb{E}\left[(\alpha + g\zeta_1^2)^{\frac{p}{2}}\right] < 1. \tag{1}$$

Si $(r_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus GARCH(1,1) stationnaire, admettant les moments nécessaires alors :

$$\mathbb{E}[r_t^2] = \frac{(1-\alpha)\tilde{\sigma}^2}{1-\alpha-g}$$

$$\mathbb{E}[r_t^4] = \frac{3(1-\alpha)^2\tilde{\sigma}^4(1+\alpha+g)}{(1-\alpha-g)(1-\alpha^2-2\alpha g-3g^2)}$$

$$\kappa = 3\frac{1-(\alpha+g)^2}{1-\alpha^2-2\alpha g-3g^2}$$

Queue de la loi stationnaire

Théorème

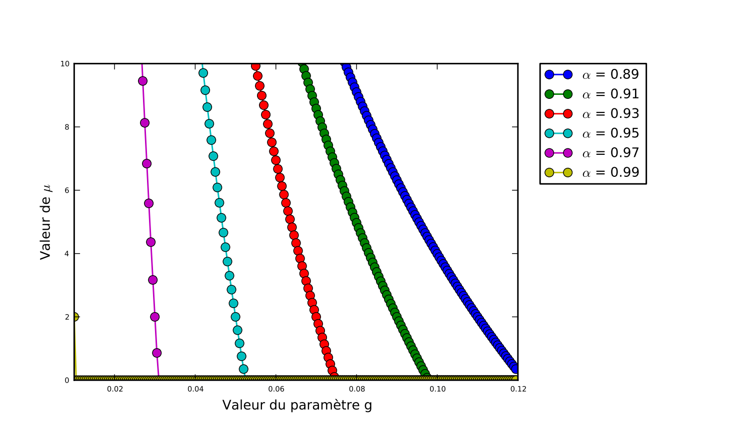
Si $(r_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus GARCH(1,1) stationnaire, alors :

$$\mathbb{P}(|r_t| > x) \sim Cx^{-1-\mu}, \forall t,$$

où μ est l'unique solution strictement positive de :

$$\mathbb{E}\left[\left(\alpha + g\zeta_1^2\right)^{\frac{\mu}{2}}\right] = 1$$

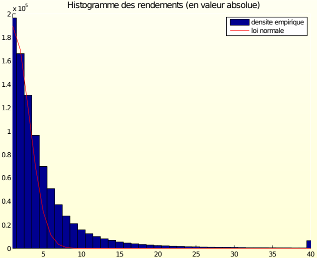
Exposant de la distribution

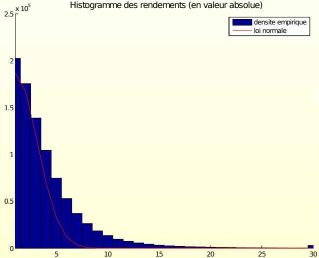


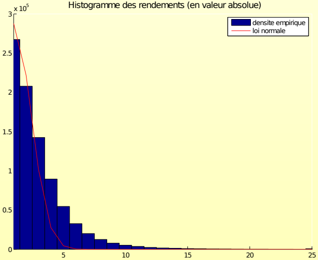
- Valeur obtenue en résolvant numériquement la condition (1) :

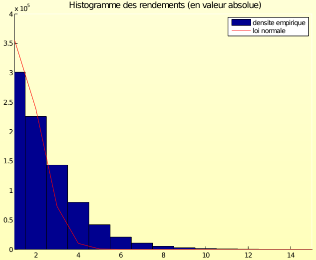
$$\mathbb{E}\left[(\alpha + g\zeta^2)^{\mu/2}\right] = 1$$

Histogrammes









Réplicats de régression pour plusieurs valeurs de paramètres

On fait 100 estimations i.i.d. du paramètre μ par régression linéaire

Nombre de pas de temps : $T = 10^7$

	α	g	$\alpha + g$	μ	mean $(\hat{\mu}_{\text{reg}})$	std $(\hat{\mu}_{\text{reg}})$
Simu 1 :	0.9	0.1	1	2	1.98	0.07
Simu 2 :	0.94	0.058	0.998	3.2	3.02	0.08
Simu 3 :	0.9	0.092	0.992	3.9	3.5	0.05
Simu 4 :	0.93	0.06	0.99	6.9	4.96	0.04

Remarque : Plus le μ théorique est grand, plus on a du mal a faire l'estimation.

Plan

Bilan :

- L'exposant μ est un paramètre asymptotique.
- Formules fermées (bibliographie étendue)
- Modèle bien documenté avec beaucoup d'avantages

Bilan :

- L'exposant μ est un paramètre asymptotique.
- Formules fermées (bibliographie étendue)
- Modèle bien documenté avec beaucoup d'avantages

Perspectives :

- Simulations dans les extrêmes,
- Problème inverse
- Autres estimateurs,
- Modèles plus complexes

Merci de votre attention !

Christian Francq and Jean-Michel Zakoian. *A tour in the asymptotic theory of Garch estimation*. Handbook of Financial time series 2009, pp : 85-111.

Timo terasvirta. *An introduction to univariate Garch models*. Handbook of Financial time series 2009, pp 17-42.

Bojan Basrak and Richard A.Davis and Thomas Mikosch. *Regular variation of Garch processes*. Stochastic processes and their applications (May, 2002), Vol. 99, issue 1, p : 95-115.

Thomas Mikosch and Catalin Starica. *Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of a Garch(1,1) process*. The annals of statistics 2000, Vol. 28, No. 5, 1427-1451.

Richard A.Davis and Thomas Mikosch. *Extreme value theory for Garch processes*. Handbook of Financial Time Series 2009, pp 187-200.

Harry Kesten. *Random difference equations and renewal theory for products of random matrices*. Acta Mathematica 1973, Vol. 131, issue 1, pp 207-248.

Eric Zivot. *Practical issues in the analysis of univariate garch models*. Handbook of Financial time series 2009, pp : 113-155.

Alexander M.Lindner. *Stationarity, mixing, distributional properties and moments of Garch(p,q)-processes*. Handbook of Financial time series 2009, pp : 43-69.

Mokkadem, A. (1990) *Propriétés de mélange des processus autoregressifs polynomiaux*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 26 1990, pp : 219–260.