Université de Strasbourg
UFR de Mathématique
et d'Informatique

L3 de Sciences
Étude de Cas
octobre 2018

Contrôle Continu N^0 1

Les documents sont autorisés,
le courriel (e-mail) et le téléphone ne sont pas autorisés.
La durée de l'épreuve : 60 minutes

La rédaction et les commandes doivent être reportées sur la copie avec les résultats numériques éventuels.

Le sujet est à rendre en même temps que la copie.

Responsable : H LI

NOM : Prénom : .

NOM : Prénom : .

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ ;\ k \in \mathbb{N}$$

1. Soit $(0, 1, 0, 0, 0)$ une réalisation d'un échantillon $(X_1, ..., X_5)$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$L(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda\Big(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0\Big)$$

2. Calculer les valeurs de $L(\lambda)$ si $\lambda = 0.5, 0.2$ et 0.1.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ et une estimation sur cette réalisation mentionnée dans la partie 1.
4. On simule $N = 10000$ réalisations d'un échantillons de taille 5 d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.1$. Dans le but d'estimer $\theta = \lambda^2 (= 0.01)$, on compare, en se basant sur ces 10000 réalisations, les performances des estimateurs suivants :

(a) $\overline{X}^2$

(b) $\overline{X}^2 - \dfrac{S_c^2}{n}$

(c) $\overline{X}^2 - \dfrac{\overline{X}}{n}$

Commenter les qualités et défauts de chaque estimateur.

Exercice 2 :

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On définit $X = \frac{-ln(U)}{\lambda}$ où $\lambda > 0$ est un paramètre.

   i) Calculer la fonction de répartition de X, $F(x) = P(X \leq x)$.

   ii) Montrer que sa dérivée $F'(x)$ est égale à la la densité de la probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ :

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}.$$

2. Utiliser la partie 1 et la fonction `runif` pour simuler 1000 réalisations d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_{50})$ (n=50) d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/3$ dont l'espérance $\mu = \mathbb{E}(X_j) = 1/\lambda$ et la variance $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X_j) = 1/\lambda^2$.

   Sauvegarder 1000 réalisations de la statistique $\overline{X} = \dfrac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i$ ainsi que celles de $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$.

3. En utilisant la fonction `hist(...` proba=TRUE) pour tracer l'histogramme de $Z/1000$.

4. Y superposer le graphe de la *densité* d'une loi normale aux paramètres bien choisis en utilisant les fonctions `curve` et `dnorm`.

5. Quel théorème venez-vous d'illustrer ? Énoncez-le.

6. Évaluer l'espérance et la variance théorique de la variable aléatoire $\overline{X}$ en se basant sur ces 1000 réalisations en utilisant les fonctions `mean` et `var`. Comparer ces résultats aux réponses données à la question 2.